

Roberto Magari

SCACCHI E PROBABILITÀ

Da tempo sappiamo che, specialmente in Italia, ciò che viene inteso di solito per cultura è monco: viene ignorata la cultura scientifica. Abbiamo fortunatamente alcuni bravi divulgatori ma spesso essi sono in difficoltà con la matematica, anche perché, come ebbe a dire di recente uno di loro, pur bravo e famoso: "La matematica non si presta ad essere spiegata per immagini". Bisogna anche dire che spesso i matematici non sanno o non vogliono condividere con altri il loro "giardino incantato" (prendo a prestito questa locuzione fra il romantico e il lezioso dal titolo di un libro divulgativo che mi fu utile da giovane). Un'altra lacuna nella formazione media riguarda gli scacchi e anche i giochi in generale; le due lacune, credo, sono connesse e può essere una buona idea quella di combattere una battaglia comune. Già la vita quotidiana offre a iosa spunti matematici; mi limiterò a due soli esempi. Quando ero ancora più giovane di ora non potevo permettermi un orologio da polso e cercavo di supplire guardando gli orologi da muro che allora erano presenti in quasi tutti i negozi. Ben presto mi posi il problema di come stimare l'ora in presenza di indicazioni discordi e quest'occasione mi introdusse a concetti probabilistici forse meglio di un trattato. Supponiamo che uno debba attraversare la strada diagonalmente sotto la pioggia ma che una parte della larghezza della strada sia coperta: che tipo di percorso dovrà seguire se valuta in un certo modo i danni della pioggia e in un certo altro il danno di un percorso più lungo? Lo studio di questo banale problema introduce benissimo ai problemi di minimo in genere (addirittura, se vogliamo, al calcolo delle variazioni) e permette anche di capire meglio la rifrazione. Se già la vita quotidiana offre spunti per riflessioni matematiche è da presumere che ancor più ne offrano i giochi e specialmente gli scacchi. Di questo fenomeno ci sono interessanti esempi classici, come il problema delle otto donne, il problema delle cinque donne, i problemi relativi al movimento del cavallo, la teoria delle case reciproche nei finali di pedoni e in altri finali. In questa chiacchierata darò tre nuovi esempi di problemi di ispirazione scacchistica che possono servire ottimamente da spunto per riflessioni matematiche di carattere probabilistico.

1. La "fortuna" e gli scacchi

Appartenendo all'onorata categoria scacchistica dei "polli" ho una naturale indulgenza verso chi, avendo perso, parla di circostanze avverse o addirittura di "sfortuna". Questo non toglie che a prima vista i luoghi comuni circa l'assenza di questo fattore dagli scacchi siano attendibili. Per affrontare l'argomento occorre anzitutto sovrapporre al concetto vago di "fortuna" del senso comune un concetto rigorosamente definito: sarà, se lo si farà con giovani scacchisti o aspiranti matematici, una delle tante occasioni per mostrare che uno dei vantaggi della matematica è proprio quello di fornire strumenti per sovrapporre ai concetti del senso comune concetti rigorosamente definiti. Supponiamo, si dirà, di essere in una situazione cui possono seguirne altre: s_1, s_2, \dots, s_n , di probabilità rispettive p_1, p_2, \dots, p_n ; si chiama allora "speranza" o "utilità" la somma $u = p_1 v_1 + p_2 v_2 + \dots + p_n v_n$. Supponiamo ora che di fatto si verifichi una situazione, fra quelle elencate come possibili, di valore v ; sembra abbastanza aderente al senso comune chiamare fortuna (del protagonista, in quella circostanza) la differenza $v - u$ e, se vogliamo, sfortuna il suo opposto $u - v$. Se si vuole che questa teoria risulti applicabile conviene che le probabilità e i valori siano presi in un opportuno campo non archimedeo, che il valore 0 sia riservato agli eventi impossibili e il valore 1 agli eventi

certi. Tornando agli scacchi occorre anzitutto chiarire che il gioco è determinato, nel senso che si verifica una (e una sola) delle seguenti possibilità:

- a) *Esiste una strategia vincente per il Bianco;*
- b) *Esiste una strategia vincente per il Nero;*
- c) *Esistono due strategie di patta, una per il Bianco e una per il Nero.*

Sono cose ovvie ma uno dei compiti di chi vuole insegnare matematica è proprio quello di far notare le cose ovvie e di far constatare quanto l'esplicitarle sia utile per lo analisi successive. Il docente potrà qui attardarsi sul concetto di strategia. L'argomento si presta anche ad una importante osservazione; quasi tutti gli scacchisti sono convinti che il caso *b*), *strategia vincente per il Nero*, non si verifichi ma naturalmente nessuno, che si sappia, è in grado di dare una dimostrazione di questa congettura. Si tratta di uno dei rari casi in cui una congettura matematica priva di dimostrazione viene ritenuta pressoché sicura. Se gli ascoltatori hanno interessi epistemologici sarà qui il caso di invitarli a discutere sul tipo di "certezza" dato dalle dimostrazioni, sul caso delle dimostrazioni molto lunghe o eseguite soltanto da calcolatori, sulla capacità del senso comune e del senso comune matematico di avanzare congetture probabili ecc. Il fatto che il gioco sia determinato non significa certo che noi siamo in grado in un tempo ragionevole di decidere quale delle tre (o delle due se ci sentiamo di escludere l'esistenza di una strategia vincente per il Nero) possibilità si verifichi. Un tempo si diceva che con i calcolatori sarebbe stato necessario per il calcolo completo del gioco un tempo dell'ordine dell'età dell'Universo, non so se ora questo tempo si è ridotto di qualche miliardo di anni o se al contrario qualche stima più accurata lo ritiene maggiore. Sappiamo bene che durante il gioco nessun giocatore può fare un'analisi completa, se non in casi particolari molto semplici. Ci si limita ad un'analisi parziale in cui l'elemento fondamentale è un insieme di giudizi su certe posizioni, legati a parametri a volte espliciti e a volte ignoti all'analista stesso e questi giudizi non dipendono da un'ulteriore analisi combinatoria. Salvo casi particolari ogni scelta di un giocatore è affidata quindi a giudizi, che possiamo ritenere in ultima analisi dalla forma "La situazione A è preferibile alla situazione B". Questi giudizi non si basano su un'analisi delle varianti ma soltanto su un certo numero (grande, probabilmente, ma non certo paragonabile al numero delle situazioni possibili) di elementi (disparità di materiale, occupazione di una colonna aperta, spazio controllato ecc.. ecc.).

Appare assai improbabile che un qualsivoglia criterio di giudizio basato su un numero di parametri relativamente piccolo (relativamente al numero delle situazioni possibili) possa presentare il caso fortunato di classificare tutte le posizioni vinte (cioè che risulterebbero vinte ad una analisi completa) come preferibili a tutte le situazioni patte e queste come preferibili a tutte le situazioni perse. Per ogni giocatore esisteranno quindi coppie (A, B) di situazioni tali che A è in effetti inferiore a B (per esempio A è patta e B vinta) ma è ritenuta superiore o equivalente a B dal giocatore. Supponiamo ora che un giocatore, diciamo il Nero, abbia la scelta fra due mosse che portano a due situazioni, diciamo C, D che sono per lui perdenti e che egli giudica equivalenti e precisamente perdenti, come sono. Tuttavia la situazione C mette il Bianco di fronte alla scelta fra due situazioni, diciamo A, B che egli giudica equivalenti ma che non lo sono, mentre la D mette il Bianco soltanto di fronte a possibilità che egli giudica correttamente. Se il Nero sceglie C e il Bianco fa la scelta sbagliata possiamo dire che il Bianco è stato "sfortunato". Il punto è che, poiché nessun giocatore è in grado, in mancanza di un'analisi completa, di dare giudizi sempre corretti, simili circostanze si presentano. Naturalmente altro è dire di aver avuto fortuna o sfortuna nel senso suddetto altro è credere a una deità più o meno maligna che perseguirebbe il povero giocatore.

Eventuali forze maligne risiedono, c'è, da pensare, nel giocatore stesso e sono di pertinenza dello psicologo (che può essere, naturalmente, il giocatore stesso in vena di autoanalisi). Trattando questi problemi si può anche tentare una definizione matematica di "giocatore" "stile di gioco" ecc.. Una prima analisi grossolana identifica il giocatore con una strategia, ossia con una funzione che ad ogni posizione associa una mossa, un'analisi più fine deve vedere il giocatore piuttosto come una funzione che ad ogni posizione e ad ogni mossa associa un numero: la probabilità che il giocatore, in quella posizione, giochi quella mossa. Sarà bene anche far osservare che, come conseguenza della non analiticità dei giudizi dei giocatori, è possibile (e, tendo a credere, probabile) che la situazione non sia transitiva, che cioè possano darsi terne A, B, C di giocatori (o semplicemente di strategie) tali che A batte B, B batte C e C batte A: in modo più complicato, tenendo conto delle fluttuazioni, può essere che il punteggio "atteso" di A con B, quello di B con C e quello di C con A siano tutti maggiori di 1/2, Ciò con buona pace del, sia pur pregevole, punteggio E.L.O..

2. Attacco o difesa?

Mi è capitato di ascoltare parte di un resoconto calcistico: la squadra A "conduceva" per 1 a 0 e il commentatore ritenne ovvio che la squadra B si portasse all'attacco. Sembra più o meno ovvio anche a me che ho pochissime e incerte nozioni di quel gioco, ma perché?. Il problema non è certo confinato al calcio, ovviamente ogni sfida che comporti più di una partita in un gioco a due presenta problemi analoghi: quali aperture dovevano scegliere Kasparov e Karpov per l'ultima partita di quella loro sfida in cui Karpov aveva 12 punti e Kasparov 11?. La questione si presta ad essere schematizzata anche se, per avere un problema relativamente semplice e chiaro, dovrò introdurre ipotesi semplificatrici eccessive.

Supponiamo che ciascun giocatore abbia a disposizione due strategie, una "rischiosa", A, e una "tranquilla", B. Diciamo di saper assegnare le probabilità del caso quando uno adotti la X e l'altro la Y, avremo una tavola dei pagamenti come segue:

	V.Karpov	Patta	V.Kasparov	-
AA	P-aa	Q-aa	R-aa	-
BB	P-bb	Q-bb	R-bb	-
AB	P-ab	Q-ab	R-ab	-
BA	P-ba	Q-ba	R-ba	-
-	-	-	-	-

Sarebbe più comodo disporre di una rappresentazione in tre dimensioni, Naturalmente la somma dei tre elementi di una stessa riga deve essere 1. Per semplificare ancora supponiamo che i due giocatori siano della stessa forza e che, se almeno uno dei due adotta la strategia rischiosa, la probabilità di patta sia 0. Sia poi k la probabilità di patta se ambedue scelgono la strategia tranquilla. La tavola diventa:

1/2	0	1/2
$(1-K)/2$	K	$(1-K)/2$
a	0	b
b	0	a

dove, ovviamente, si dovrà supporre a $(1-k)/2$. In effetti nella loro prima sfida la situazione era invertita e si ebbe l'impressione che Karpov avesse scelto, non si sa se a torto o a ragione, perché non sappiamo stimare a, b, k, una strategia "rischiosa".

3. Un'applicazione della teoria di Von Neumann agli scacchi invisibili.

Si chiama gioco degli scacchi invisibili o "Kriegspiel" un gioco in cui si seguono le regole degli scacchi salvo per il fatto che i giocatori non conoscono l'uno le mosse dell'altro. All'inizio del gioco il Bianco fa una mossa su una sua scacchiera che l'avversario non vede ma viene bensì vista da un arbitro, che avvisa il Nero dicendo "il Bianco ha mosso". Analogamente muove il Nero ecc.. Se ad un certo punto una mossa risulta impossibile l'arbitro lo dice in modo da essere inteso da ambedue i giocatori. Altre informazioni che l'arbitro dà, (sempre ad ambedue i giocatori) se si danno le circostanze opportune, sono:

A dà scacco in verticale,

A dà scacco in orizzontale,

A dà scacco sulla grande diagonale (relativamente al Re),

A dà scacco sulla piccola diagonale (relativamente al Re),

A dà scacco di cavallo,

A prende un pezzo in xy,

A prende un pedone in xy,

A ha una presa di pedone in xy,

A ha una doppia presa di pedone in xy (e una in zt ecc..),

A ha promosso (non si dice a che cosa ne in quale colonna) A ha dato matto,

A ha messo in stallo B.

In questo gioco affascinante chiaramente si possono avere meccanismi di bluff o comunque adatti ad essere trattati in teoria dei giochi alla von Neumann. E' chiaro che la relazione che passa fra una strategia e un'altra se la prima batte la seconda non è transitiva, può darsi cioè che *A batte B che batte C che batte D che batte A*.

Una breve partita:

1.e4 (*l'arbitro dice "il Bianco ha mosso"*), **d5** (*l'arbitro dice "Il nero ha mosso; il Bianco ha una presa di pedone in d5"*)

2.e:d5 (*l'arbitro dice: "Il bianco ha mosso, prendendo un pedone in d5", Ag4?! (il nero specula sul fatto che è improbabile che il Bianco indovini l'attacco alla sua donna; L'arbitro dice "Il Nero ha mosso")*)

3.f3! (*il Bianco ha capito come sono andate le cose o meglio pensa che possano essere andate cose e del resto non sarebbe un gran guaio aver perso un tempo con 3.f3, l'arbitro dice: "il Bianco ha mosso"*), **Ad1** (*l'arbitro dice "impossibile" e il nero pensa che, per esempio, può esserci un cavallo bianco in e2 o in f3, rinuncia al suo tentativo e*

gioca, diciamo, Cc6).(L'arbitro dice: "Il Nero ha mosso; il Bianco ha una presa di pedone in g4".) 4.f:g4 (l'arbitro dice: "il Bianco ha mosso e ha preso un pezzo in g4".)

Non vorrei che questo semplice esempio facesse pensare che il gioco si riduca a meschini trucchetti. Lo studio dei finali è poi affascinante, con i pezzi avversari che oscillano fra la condizione di corpuscoli e quella di onde di probabilità. Naturalmente posizioni vinte a scacchi possono essere perse o patte a scacchi invisibili e viceversa.

Occorre inoltre notare che a scacchi invisibili una posizione può essere, anziché semplicemente persa, patta o vinta anche, per esempio, vinta con una certa probabilità.

Ciò spiega che si debba usare la teoria dei giochi di von Neumann. La posizione: Bianco Rc5, Pc6; Nero: Rc7, dove supponiamo per semplicità che all'inizio la posizione sia nota ad ambedue i giocatori, è ovviamente patta, chiunque abbia il tratto, a scacchi ortodossi ed è invece, a scacchi invisibili, "quasi" vinta per il Bianco, nel senso che, detto in breve, il Bianco può scegliere la probabilità che vuole di vincere purché non esiga la certezza. Per meglio dire comunque preso un numero reale k minore di 1 esiste una strategia per il Bianco che gli dà probabilità maggiore di k di vincere. Ciò se si prescinde da regole del tipo "cinquanta mosse". se invece si pone un limite allora si può calcolare la miglior probabilità che, il Bianco può darsi. Supponiamo il tratto al Nero: egli ha la scelta fra i tratti 1...,kb8, 1...,Rc8, 1...,Rd8. A scacchi ortodossi dovrebbe senz'altro giocare Rc8. Il Bianco giocherà 2.Rb6 o 2.Rd6, supponiamo Rb6. Se il Nero, al tratto precedente, si è posto in b8 o in d8 ora giocherà 2...,Rc8, altrimenti 2...,Rb8 o 2...,Rd8. Il Bianco naturalmente non sa a questo punto se il Re nero è in b8, in c8 o in d8. E' chiaro che se il Re nero fosse in c8 al Bianco converrebbe ora spingere il pedone ma se il Re nero fosse invece in una casa laterale (b8 o d8) questa mossa porterebbe alla patta. In ogni caso al Bianco, supposto, ricordiamo, in b6, conviene anzitutto tentare 3.Rb7. Se questa mossa è possibile il Bianco avrà vinto, altrimenti può ancora scegliere se spingere il pedone o tornarsene, diciamo, in c5 per cominciare da capo la manovra. Se non c'è limite alla lunghezza della partita al Bianco conviene ripetere la manovra senza spingere il pedone se non, diciamo, la k -esima volta che tenta. Il Nero d'altronde deve giocare al secondo tratto della manovra Rc8, altrimenti c'è una probabilità su due che il Bianco si sia posto dal lato giusto e vinca. Così facendo però, quella volta in cui il Bianco spingerà, il Nero si troverà in c8 e perderà. Perciò al Nero conviene, sembrerebbe, giocare qualche volta al secondo tratto Rb8 o Rd8 e, se lo farà per l'appunto quella volta in cui il bianco spingerà, la partita sarà patta. La probabilità di vittoria del Bianco è tanto più grande quanto maggiore è k , e anzi tende a 1 al tendere di k all'infinito, Come analizzare la situazione l'ho spiegato la prima volta nel Manuale di scacchi eterodossi di Mario Leoncini e Roberto Magari, Siena 1980, qui mi limiterò a trattare il caso in cui ci siano limiti alla lunghezza della partita e si sia giunti all'ultima possibile ripetizione della manovra. In tal caso il Bianco dovrà giocare, dopo il tentativo di avanzare il Re in settima, la spinta, vincendo se il Re nero si troverà in c8 e pattando invece se si troverà, in b8 o in d8. Che cosa deve fare il Nero? Se, al secondo tratto, gioca Rc8 il Bianco, dopo aver tentato inutilmente l'avanzata in settima, giocherà certamente la spinta, vincendo. Perciò il Nero deve in queste circostanze giocare al secondo tratto Rb8 o Rd8, pattando se il Bianco si sarà portato sulla stessa colonna e perdendo altrimenti. In questo semplice caso quindi la probabilità di vittoria del Bianco è 1/2: la posizione vale, per così dire, 3/4 di punto per il Bianco. naturalmente, se in futuro si giocheranno tornei di scacchi invisibili, converrà convenire che in questi casi i giocatori possano accordarsi, appunto, per una spartizione ineguale del punto, anche se ciò forse si presterebbe a complessi stratagemmi relativi alla classifica. Non intendo insistere ma ora saremmo in grado di esaminare la situazione alla penultima manovra tenendo presente che, per l'analisi appena fatta dell'ultima manovra, la situazione varrà

3/4 se il Bianco sceglierà di non osare la spinta. In corrispondenza a questa possibilità del Bianco il Nero deve naturalmente darsi una certa probabilità di giocare 2...., Rc8.

Ciò mi ricorda una mia semplice idea relativa invece agli scacchi ordinari, idea, temo, non più interessante del famoso orologio di Fischer ma in tema, come vedremo, con l'argomento che ho trattato. Anzitutto bisogna dire che le proposte di patta creano spesso qualche disturbo, tanto che il giocatore che vorrebbe proporre la patta può astersi dal farlo per non disturbare l'avversario e, al contrario, se lo fa troppo spesso in una partita può, credo, essere ammonito dall'arbitro. Inoltre dopo tutto una offerta di patta è un'informazione che si dà all'avversario circa il nostro giudizio sulla posizione. Per evitare questi inconvenienti basterebbe disporre di qualche semplice congegno equivalente, diciamo a due interruttori in serie con una spia luminosa, Ciascun giocatore dispone di un interruttore nascosto all'avversario: se lo aziona egli viene a proporre la patta e la spia si accenderà se e soltanto se anche l'avversario farà la stessa cosa col suo interruttore, Ciò si presta ad una complicazione. se, anziché di interruttori, si disponesse di manopole graduate, diciamo, dallo zero al dieci e disposte in modo tale che la spia si accenda se e soltanto se la somma delle due indicazioni è inferiore al dieci potremmo proporre senza disturbare l'avversario, una spartizione del punto in parti disuguali. Io valuto, supponiamo, la mia posizione come avente tre probabilità su dieci e propongo con la mia manopola sistemata sul 3, una spartizione in cui a me tocchino tre decimi di punto e all'avversario sette. La spia si accenderà se, regolando la sua manopola, l'avversario avrà indicato di contentarsi di sette decimi di punto o meno (nel caso in cui la sua indicazione sia minore si potrebbe spartire l'eccesso in parti proporzionali.

Naturalmente occorre dire, anche qui, che la faccenda si presterebbe a sottili stratagemmi per la posizione in classifica.

Supponiamo che la FIDE, come penso, non accetti quanto sopra, potrebbero egualmente due giocatori applicare l'idea di una spartizione ineguale del punto? Sì, nel senso che dirò. Tutti sappiamo che in posizioni patte in cui ad ambedue i giocatori la vittoria interessa, per così dire, più del doppio della patta, molti, non fra i presenti, ricorrono alla "monetina". Ebbene, supponiamo che, a giudizio di entrambi i giocatori, una certa posizione porti con probabilità, diciamo, 4/10 alla vittoria del Bianco, con probabilità 2/10 alla vittoria del Nero e con probabilità ancora 4/10 alla patta. Se ambedue i giocatori sono interessati alla vittoria ma non alla patta, per motivi di classifica o di promozione, potrebbe convenir loro scegliere una carta fra dieci con l'intesa che le carte 1, 2, 3, 4, 5, 6 daranno la vittoria al Bianco e le carte 7, 8, 9, 10 al Nero. Naturalmente non lo propongo seriamente, non voglio essere accusato di istigazione a delinquere!