

Introduzione

L'introduzione del sistema di valutazione degli scacchi ha probabilmente favorito l'incremento della popolarizzazione dei tornei di scacchi più di ogni altro fattore. Negli anni '50 il professore Arpad Elo (1903-1992) sviluppa la teoria del *sistema di classificazione* corrente, spesso chiamato "sistema Elo", che solo nel 1970 viene adottato dalla Federazione Internazionale degli Scacchi (FIDE) e in seguito da molte altre federazioni nazionali, apportando ciascuna varie modifiche. Oggi è impossibile immaginare un torneo di scacchi senza un sistema di valutazione, o ancor meglio senza il sistema Elo.

Nonostante la sua radicalità, il sistema, è stato ed è tutt'oggi preda di numerose critiche fino ad essere definito come un vero e proprio insieme di "forche caudine". La maggior parte delle critiche sopraggiungono soprattutto da quei giocatori che, concependo il gioco come puro divertimento, si trovano classificati (per loro definizione) attraverso un sistema "disumano" e "antisportivo". L'aspetto migliore del sistema Elo è che si basa su assunzioni matematicamente così semplici, da permettere ad un qualsiasi giocatore di calcolare la propria valutazione in ogni momento. Questo offre agli scacchisti, il grosso vantaggio di poter predeterminare il guadagno o la perdita di punti Elo in caso di vittoria, sconfitta o patta con un certo avversario, e quindi di "guidare", là dove è possibile, il risultato finale. Allo stesso tempo, fatti come il "caso Ricca", che è stato senz'altro il più eclatante ma non il primo, ci portano a considerarlo un sistema non ineccepibile, e quindi a cercarne uno migliore. Infatti all'inizio di quest'anno, il Candidato Maestro torinese Roberto Ricca ha messo in crisi, sia la Federazione italiana che l'intero sistema Elo semplicemente sfruttando alcune incongruenze nel calcolo dell'Elo e salendo al primo posto della graduatoria nazionale.

Anche se il nome di Elo è di gran lunga il più associato allo sviluppo del corrente sistema di classificazione di scacchi, i fondamenti statistici del sistema sono precedenti al suo lavoro. Il primi lavori riguardanti il modello di abilità scacchistica sono da associarsi a A.Zermelo nel 1929 e in seguito allo statistico I.J.Good nel 1955.

Nel 1988 il dr.J.D.Nunn, al Congresso FIDE, presentò una nuova teoria per il calcolo del rating, ma grazie anche all'opposizione di Elo non ebbe successo.

Nel 1993 Mark Glickman, oggi professore di matematica all'Università di Boston e Presidente della Commissione del Rating della USCF (Federazione di scacchi degli Stati Uniti), nella sua tesi di dottorato fornisce i primi elementi di un sistema di classificazione dei giocatori con basi completamente diverse dal precedente sistema Elo. Il suo sistema, con il nome di "Sistema Glicko", è stato adottato a partire dal 1995 da Internet Chess servers. Data la complessità "formale" del Glicko, e l'affezione all'Elo della gran parte dei giocatori, nessuna federazione nazionale o internazionale è stato ancora adottato.

Circa quattordici anni fa, studiò un possibile sistema alternativo all'Elo anche il Professor Roberto Magari, ma giunto ad una contraddizione rimandò le ricerche fino a dimenticarsene.

La prima idea di un nuovo sistema di classificazione è nata, ancor prima che si venisse a conoscenza del sistema Glicko, con l'intento di arrivare ad una migliore descrizione numerica della reale abilità del giocatore, usando la teoria Bayesiana e partendo da semplici considerazioni. Analizzando il sistema Glicko abbiamo potuto constatare che, anche se a livello numerico dà risultati sorprendenti, esistono dal punto di vista teorico elementi non "convincenti" basati su non lecite approssimazioni.

Il nostro obbiettivo era quello di realizzare un sistema che migliorasse teoricamente le basi del Glicko, ma allo stesso tempo conservasse la semplicità *formale* dell'Elo. Non riuscendo, con un'impostazione Bayesiana, a conciliare questi ultimi due aspetti, abbiamo preferito conferire al nostro sistema una maggiore validità matematica (ben lontana da una perfezione assoluta), a scapito della semplicità dei risultati (ma che in un'era informatica è ottenibile con i calcolatori).

Nel primo capitolo mostriamo alcuni strumenti matematici, che vengono usati nel corso della trattazione dei sistemi di calcolo dell'abilità del giocatore.

Nel secondo capitolo trattiamo le basi del Sistema Elo, trascurando le varie modifiche che ciascuna Federazione nazionale vi ha apportato.

Nel terzo capitolo esponiamo l'intero Sistema Glicko, evidenziando aspetti positivi e negativi dell'impostazione Bayesiana scelta.

Infine, nel quarto capitolo, dopo aver mostrato l'impostazione di un "primo tentativo", descriviamo il Nostro Sistema Bayesiano per la valutazione dell'abilità del giocatore, con il quale siamo giunti ad ottimi risultati per l'aggiornamento dell'abilità del giocatore dopo una vittoria o una sconfitta. Facendo alcune approssimazioni siamo riusciti a fornire un metodo sia per il calcolo dell'abilità dopo la patta (termine che indica il pareggio, ma più conforme al linguaggio scacchistico), sia per l'aggiornamento dell'abilità dopo n partite in cui si ammettono i tre possibili risultati.

Capitolo 1

Strumenti matematici

Faremo un breve accenno agli strumenti matematici che servono ad una migliore comprensione dei sistemi di classificazione che spiegheremo in seguito. Si darà per nota la conoscenza dei principi elementari del calcolo di probabilità, dando conto solamente ad alcuni di essi di particolare interesse. Rimandiamo per il resto alla bibliografia.[cfr.[1],[11]].

Il problema della valutazione dei giocatori di scacchi, si colloca all'interno di un argomento più ampio, che è quello della *classificazione di coppie comparabili*. In genere in una situazione tipica sono coinvolte un certo numero di comparazioni, ciascuna tra coppie di individui o di elementi. Il risultato di una singola comparazione può essere la vincita (o il pareggio) di un gioco da parte di uno dei giocatori, oppure la preferenza (o la non preferenza in caso di pareggio) di uno dei due dichiarata da un giudice.

1.1 Modelli a valore intrinseco

Tra i modelli di classificazione di coppie comparabili, noi ci occuperemo di quelli a "valore intrinseco", usati per la classificazione dei giocatori di scacchi. In ognuno di questi, a ciascun elemento o giocatore viene associato *a priori* un parametro, che può essere interpretato come sua relativa abilità o forza di gioco, il quale determina il punteggio atteso.

Il punteggio atteso di un elemento di valore w_i quando è comparato con uno di valore w_j è una funzione $e_{i,j}$ che è non-decrescente in w_i , non-crescente in w_j . Ciascuna di questa funzioni verifica la seguente assunzione per una specifica funzione H :

$$e_{i,j} = e(w_i, w_j) = H(w_i - w_j)$$

dove H è la funzione di distribuzione di una variabile random simmetrica. Inoltre H è una funzione non-decrescente tale che:

$$H(-\infty) = 0, \quad H(\infty) = 1 \quad e \quad H(-x) + H(x) \equiv 1.$$

Noi analizzeremo le sole due funzioni di distribuzioni che poi useremo nei nostri sistemi teorici, usate anche nel sistema Elo e Glicko:

- il modello di Bradley-Terry, nelle varie formulazioni
- la distribuzione normale.

Ricordiamo:

Definizione

Si definisce *funzione di distribuzione (o di ripartizione)* della variabile aleatoria X la funzione di variabile reale, $F(x) : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$, definita dalla:

$$F(x) = Prob(X \leq x).$$

Se la distribuzione non concentra masse di probabilità in alcun punto e quindi la probabilità è distribuita su un insieme continuo di punti, si dice che la $F(x)$ è "diffusa". In questo caso esiste una funzione $f(x)$ detta *densità di probabilità* tale che:

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy.$$

Nei punti di continuità della $f(x)$ risulta

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

Inoltre data X una variabile aleatoria e $F(x)$ la sua funzione di distribuzione possiamo calcolare la *speranza matematica* (o *valor medio*) di X , il cui significato spiegheremo in seguito, come:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

ed osservando che vale la seguente proprietà

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Allo stesso modo consideriamo la *varianza* di X come:

$$Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_1)^2 \cdot f(x) dx$$

dove $m_1 = E(X)$, e valgono le seguenti proprietà:

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

1.1.1 Modello di Bradley-Terry

La semplice formulazione lo ha reso uno dei più famosi modelli per le comparazioni di coppie. Il modello di B-T a "valore intrinseco" si fonda sull'idea che il rapporto dei valori attesi (o delle probabilità di vittoria) di due elementi comparati è uguale a quello dei

valori, cioè siano w_i e w_j i valori rispettivamente degli elementi I e J :

$$e_{i,j}/e_{j,i} = w_i/w_j \quad \text{o equivalentemente} \quad e_{i,j} = w_i/(w_i + w_j)$$

o meglio il modello di B-T è quello che ci rappresenta la probabilità che l'elemento I vinca l'elemento J come:

$$P_{i,j} = \frac{w_i}{w_i + w_j},$$

notiamo che $P_{i,j} + P_{j,i} = 1$ e quindi il modello di B-T non prevederebbe le patte.

Il modello usato da Glickman nel suo sistema è dovuto a T.Leonard (1977) che permette un approccio Bayesiano al modello di Bradley-Terry, e comporta una riparametrizzazione del modello in termini di $u = \ln w_i$, $v = \ln w_j$. Questo porta ad esprimere la probabilità che l'elemento con valore u vinca con quello di valore v come:

$$P(u, v) = \frac{e^u}{e^u + e^v}.$$

La funzione di distribuzione associata a questo modello è la funzione logistica la cui forma standard è:

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} \quad (1.3)$$

ottenendo la precedente ponendo $x = u - v$, quindi come differenza delle due valutazioni. La rispettiva forma standard della funzione di densità di probabilità logistica, detta anche funzione di Verhulst, è:

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2} \quad (1.4)$$

che è una funzione di densità simmetrica con:

media = 0, varianza = $\pi^2/3$.

La forma generale della funzione di densità di probabilità logistica è:

$$f(x) = \frac{e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}}{\sigma \left(1 + e^{-\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)}\right)^2} \quad (1.5)$$

dove m è il parametro di locazione e σ il parametro di scala.

La precedente densità è simmetrica rispetto a m ed ha:

$$\text{media} = m \text{ e varianza} = \pi^2 \sigma^2 / 3.$$

Glickman nel suo sistema di classificazione usa però una logistica in base $\sqrt{10}$ che ha in forma generale una densità di equazione:

$$f(x) = \frac{\ln 10}{2\sigma} \frac{\left(10^{-\frac{(x-m)}{2\sigma}}\right)}{\left(1 + 10^{-\frac{(x-m)}{2\sigma}}\right)^2} \quad (1.6)$$

con $\text{media} = m$ e $\text{varianza} = \left(\frac{2\sigma}{\ln 10}\right)^2 \frac{\pi^2}{3}$. La funzione di distribuzione corrispondente alla (1.6) ha la forma

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(y) dy = \frac{1}{1 + 10^{-\frac{(x-m)}{2\sigma}}}. \quad (1.7)$$

Faremo notare in seguito, durante la spiegazione del sistema Glicko, che la funzione di densità logistica in base $\sqrt{10}$, di cui Glickman ha bisogno per le approssimazioni, è una forma ancora più generale che ha $\text{media} = m$ e $\text{varianza} = \sigma^2$. Di questa di cui noi descriveremo l'equazione, né Elo né Glickman fanno mai menzione. Occorrerà aggiustare solo la varianza per ottenere l'equazione della densità desiderata

$$g(x) = \frac{\pi}{\sigma\sqrt{3}} \frac{10^{-\frac{(x-m)}{\sigma \ln 10} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}}{\left(1 + 10^{-\frac{(x-m)}{\sigma \ln 10} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}\right)^2} \quad (1.8)$$

con $\text{media} = m$ e $\text{varianza} = \sigma^2$.

Facciamo notare che la funzione $F(x)$ sopra, in alcuni testi si trova nella formulazione:

$$H(x) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^x \frac{1}{(\cosh(y/2))^2} dy = \frac{e^x}{1 + e^x}, \quad (1.9)$$

e corrispondentemente la funzione di densità di media $= 0$ e varianza $= \pi^2/3$, la possiamo esprimere come:

$$h(x) = \frac{1}{4} \frac{1}{(\cosh(x/2))^2} \quad (1.10)$$

dove per la definizione di $\cosh(t) \equiv \frac{\exp(t) + \exp(-t)}{2}$, ottengo l'equazione (1.4).

Anche per questa è necessario arrivare alla formulazione di una densità con media m e varianza σ^2 , ottenibile grazie alle proprietà della speranza matematica (1.1), della varianza (1.2) e dalla definizione di funzione di distribuzione.

Passaggio algebrico dalla densità (1.10) con media $= 0$ e varianza $= \pi^2/3$ alla stessa densità con media $= m$ e varianza $= \sigma^2$.

Data la variabile aleatoria Y tale che : $E(Y) = 0$, $Var(Y) = \pi^2/3$ dobbiamo trovare per quali valori $k, h \in \mathbb{R}$ la variabile aleatoria $X = kY + h$ è tale che:

$$E(X) = m$$

$$Var(X) = \sigma^2$$

impostando il sistema delle due equazioni ed usando semplicemente le proprietà della speranza matematica e della varianza ottengo che

$$h = m$$

$$k = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}.$$

Quindi la variabile desiderata sarà $X = \frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}Y + m$.

Per ottenere la nuova funzione di distribuzione basterà calcolare:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \text{Prob}(X \leq x) = \text{Prob}\left(\frac{\sqrt{3}\sigma}{\pi}Y + m \leq x\right) \\ &= \text{Prob}\left(Y \leq \frac{x-m}{\sigma} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) = F_Y\left(\frac{x-m}{\sigma} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

sostituendo la nuova variabile nell'espressione della $H(x)$ si ottiene la nuova funzione di distribuzione:

$$H(x) = \frac{e^{\frac{x-m}{\sigma} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}}{1 + e^{\frac{x-m}{\sigma} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}}$$

analogamente, in termini del coseno iperbolico, la funzione di densità diventa:

$$h(x) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sigma} \frac{1}{\left(\cosh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{x-m}{\sigma}\right)\right)^2} \quad (1.11)$$

ed è questa la funzione di densità che abbiamo preferito usare nel nostro sistema di valutazione.

1.1.2 Distribuzione normale (o di Gauss)

La distribuzione normale standard per la variabile aleatoria X , ha una densità data dalla:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (1.12)$$

ed è una densità simmetrica con media nell'origine e varianza unitaria e viene spesso denotata con $N(0, 1)$. In generale ci occuperemo di funzioni di densità $N(m, \sigma)$ cioè con media = m e varianza = σ^2 la cui equazione generale è:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}(x-m)^2/\sigma^2}$$

Ecco una proprietà interessante ed a noi, in seguito, molto utile.

Proposizione

Sia X_1 una variabile aleatoria distribuita con una densità $N(m_1, \sigma_1)$ ed una variabile aleatoria X_2 distribuita $N(m_2, \sigma_2)$, la differenza $Y = X_1 - X_2$ è una variabile aleatoria ancora distribuita normalmente di densità $N(m_1 - m_2, \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2})$.

Dimostrazione

Data $Y = X_1 - X_2$ variabile aleatoria la sua funzione di distribuzione è definita da:

$$\begin{aligned} F(y) &= P(Y \leq y / m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2) \\ &= \int_{\mathbb{R}} P(X_1 \leq y + x_2 / m_1, \sigma_1, m_2, \sigma_2, X_2 = x_2) \cdot f(x_2) dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{x_2+y} e^{-\frac{1}{2}(x_1-m_1)^2/\sigma_1^2} dx_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2-m_2)^2/\sigma_2^2} dx_2. \end{aligned}$$

Per calcolare la densità della variabile $Y = X_1 - X_2$ considero

$$\begin{aligned} f(y) &= dF(y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{x_2+y}^{x_2+y+h} e^{-\frac{1}{2}(x_1-m_1)^2/\sigma_1^2} dx_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2-m_2)^2/\sigma_2^2} dx_2 \end{aligned}$$

per il teorema della media integrale, esiste un $\bar{h} \in [0, h]$, tale che:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} h \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2+y+\bar{h}-m_1)^2/\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2-m_2)^2/\sigma_2^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} h \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2+y+\bar{h}-m_1)^2/\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2-m_2)^2/\sigma_2^2} dx_2 \\ &= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_2+y-m_1)^2/\sigma_1^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}(x_2-m_2)^2/\sigma_2^2} dx_2 \end{aligned}$$

L'esponente all'interno dell'integrale diventa:

$$- \left[\frac{(x_2 + y - m_1)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{2\sigma_2^2} \right],$$

svolvendo i calcoli e separando i termini con x_2 si ottiene:

$$- \left[\frac{(x_2 - r)^2}{2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} - \frac{k}{2 \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \right],$$

dove abbiamo posto $r = \frac{m_1 \sigma_2^2 + m_2 \sigma_1^2 - y \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$,

$k = \left(\frac{m_1 \sigma_2^2 + m_2 \sigma_1^2 - y \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)^2 - \left(\frac{y^2 \sigma_2^2 + m_1^2 \sigma_2^2 - 2ym_1 \sigma_2^2 + m_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right)$ (k è indipendente da x_2)

e $\delta^2 = \frac{\sigma_1^2 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$. Tornando all'integrale ottengo:

$$f(y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(x_2 - g)^2 / \delta^2} \cdot e^{k/2\delta^2} dx_2,$$

risolvendo l'integrale della gaussiana su x_2 si ha

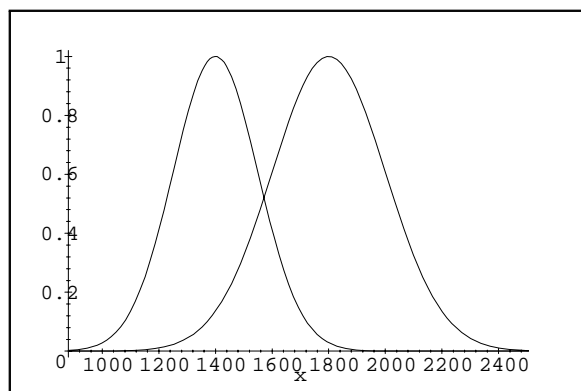
$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-k/2\delta^2}.$$

Semplificando si ha $k = (y - (m_1 - m_2))^2$, per ottenere

$$f(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-(y - (m_1 - m_2))^2 / (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \quad (1.13)$$

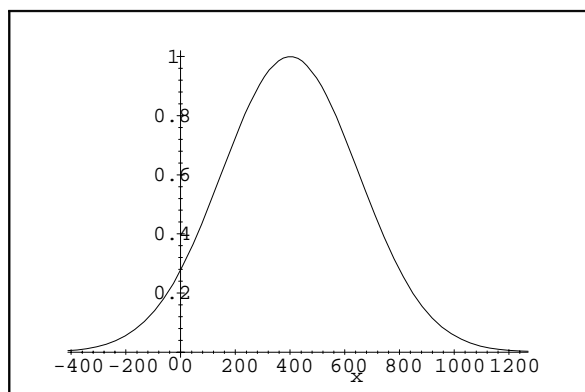
Questa è ancora l'equazione di una densità normale che ha media $(m_1 - m_2)$ e varianza $(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

Nel grafico (1.1) seguente abbiamo: due densità normali sovrapposte, non normalizzate, una di media 1800, l'altra di media 1400, con varianze diverse.



(Grafico (1.1))

La funzione densità normale, della differenza delle performance di due giocatori, la cui abilità è rappresentata dalle funzioni del grafico (1.1), ha il seguente grafico:



(Grafico (1.2))

Come possiamo notare la densità normale differenza ha media $D = 400$. L'area di questa curva alla destra di 0 rappresenta la probabilità che il giocatore più "forte" vinca, mentre l'area alla sinistra di 0 è la probabilità di vincere del giocatore con valutazione più bassa.

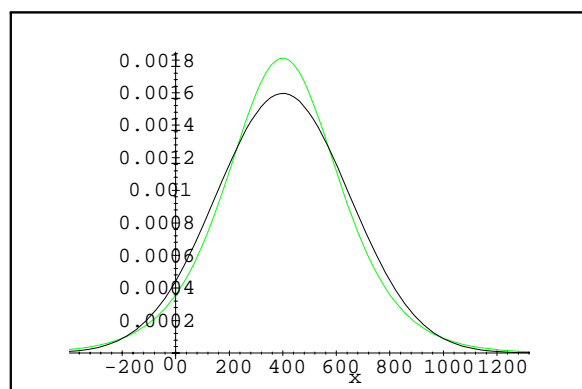
La spiegazione matematica di quest'ultima osservazione risiede tutta nella definizione di funzione di distribuzione. Sia infatti $F(x)$ la funzione di distribuzione della differenza delle abilità dei due giocatori, e quindi della variabile aleatoria $X = X_1 - X_2$. La probabilità che X_1 vinca con X_2 si può esprimere come:

$$P(X_1 \leq X_2) = P(X_1 - X_2 \leq 0) \equiv F(0) = \int_{-\infty}^0 f(x) dx.$$

1.2 Confronti tra le densità

Tutti i sistemi di valutazione che analizzeremo in seguito, l'Elo, il Glicko ed il Nostro, si fondano sull'assunzione che l'abilità del giocatore, considerata come variabile random X , segua una distribuzione normale, con una certa media e varianza. Un elemento determinante di questa assunzione è che se noi consideriamo tutte le combinazioni dei valori della distribuzione dell'abilità di un giocatore con tutti i possibili valori dell'abilità dell'avversario, la differenza ha ancora la stessa forma. Per la formulazione del sistema Elo, non sono necessarie ulteriori considerazioni, mentre sia nel sistema Glicko che nel Nostro, anche se con modalità diverse, occorre che la densità scelta sia anche "facilmente" integrabile, come lo è la logistica. E' solo per questo motivo che siamo dovuti ricorrere all'altra densità, che possa ben approssimare la gaussiana che stiamo considerando. Il passaggio da una densità normale ad una densità logistica, avente stessa media e stessa varianza, è da considerarsi lecito. A questo proposito, infatti il Professore di statistica Hal Stern in un articolo del 1992 dimostra che quando si analizzano risultati di coppie comparabili, non c'è distinzione tra assumere distribuzioni logistiche o distribuzioni normali per la differenza delle abilità di due giocatori. Fidandoci di quest'ultimo fatto e quindi non dimostrando algebricamente la buona approssimazione, riporteremo soltanto, le due curve sovrapposte.

La curva nera rappresenta la funzione di densità normale , mentre quella verde rappresenta la densità logistica (1.11) con stessa media e stessa varianza.



(Grafico (1.3))

1.3 Elementi di teoria della probabilità Bayesiana

La probabilità di un evento E è la misura del grado di fiducia che riponiamo nell'avverificarsi di E , secondo le informazioni che abbiamo su quell'evento.

Definizione

La *probabilità di E* , secondo l'opinione di un dato individuo A , è il prezzo \mathbf{p} che A stimebbe "equo" pagare in una scommessa "coerente" per esigere un importo unitario al verificarsi di E .

Dove il termine "equo" significa che: A è disposto ad accettare la scommessa senza cambiare la somma puntata, quando da scommettitore diventa banco e viceversa.

Mentre il termine "coerente" significa che: non deve esistere una combinazione di scommesse fatta in modo che, qualsiasi sia l'evento che si verifica, A vinca sempre (o perda sempre).

La probabilità $P(E)$ è sempre riferita all'informazioni che A ha su E , se si aggiunge

un'ulteriore informazione, che denoteremo con H , la probabilità di E cambia. In questi casi si parlerà di *probabilità condizionata* data H ovvero di $P(E/H)$.

Definizione

L'evento E subordinato ad H , E/H è:

- vero se, qualora H sia vero E si verifica
- falso se, qualora H sia vero E non si verifica
- non assume nessun valore logico (e quindi è indeterminato) se H non si verifica.

Inoltre è possibile dimostrare, con la sola assunzione di una scommessa coerente, che vale

$$P(H) \cdot P(E/H) = P(E \cap H)$$

Faremo anche un breve accenno al "teorema di Bayes". Il celebre teorema nella sua formulazione più semplice, non è altro che una diretta conseguenza della relazione che lega la probabilità dell'intersezione e la probabilità subordinata. Dati due eventi A e B sussiste, come abbiamo visto sopra, la relazione $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ e dato che $P(A \cap B) = P(B \cap A)$ si ottiene, se $P(A) \neq 0$

$$P(B/A) = \frac{P(B) \cdot P(A/B)}{P(A)}. \quad (1.14)$$

Se invece dell'evento B consideriamo una partizione dell'evento certo $B_1 \dots B_n$, otteniamo la forma classica del teorema di Bayes:

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i) \cdot P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i)}. \quad (1.15)$$

Data una variabile aleatoria X , assumiamo che abbia una funzione di densità $f(x)$ che

dipenda da un parametro θ , un Bayesiano non cercherà di stimare il parametro, ma considerandolo come una variabile random Θ , le assegnerà una funzione di densità che indicheremo con $\Pi(\theta)$, dove θ rappresenterà tutti i possibili valori della variabile Θ . La funzione $f(x; \theta)$ diventerà una densità (o probabilità) *condizionata*, data $\Theta = \theta$, denotata da $f(x/\Theta = \theta)$ oppure $f(x/\theta)$. Per conoscere Θ , ovvero la sua probabilità o la sua funzione di densità facciamo, se possibile e conveniente, alcune osservazioni su $X = x$. Questo si traduce nel fare osservazioni su alcune copie di X , cioè sulle variabili X_1, \dots, X_n distribuite come X e tra loro indipendenti subordinatamente alla conoscenza del parametro Θ .

Nel caso in cui sia X che Θ siano discrete il teorema di Bayes ci permette di dire che:

$$P(\Theta = \theta_j / X = x_i) = \frac{P(X = x_i / \Theta = \theta_j) P(\Theta = \theta_j)}{\sum_k P(X = x_i / \Theta = \theta_k) P(\Theta = \theta_k)},$$

generalizzando a variabili dotate di densità, abbiamo:

$$\Pi(\theta_j / x_i) = \frac{f(x_i / \theta_j) \Pi_0(\theta_j)}{\int_k f(x_i / \theta_k) \Pi_0(\theta_k) d\theta_k}.$$

Il fattore di normalizzazione $\int_k f(x_i / \theta_k) \Pi_0(\theta_k) d\theta_k$ lo denoteremo in seguito con K .

La probabilità non condizionata $\Pi_0(\theta_j)$, che è la probabilità di Θ prima di osservare X , si definisce *distribuzione a priori* di Θ . La $\Pi(\theta_j / x_i)$ viene detta *distribuzione a posteriori* di Θ , ed è la probabilità di Θ dopo l'osservazione di x_1, \dots, x_n . Infine la probabilità condizionata di $\tilde{X} = (X_1, \dots, X_n)$ dato $\Theta = \theta$ è detta *funzione di verosimiglianza* (*likelihood*) rappresentata da $L(\theta) = f(\tilde{x}/\theta)$.

Definizione

La definizione di *valore atteso* (o *speranza matematica*) per un Bayesiano dopo aver osservato n campioni diventa:

$$E(X) = \int_x \int_{\theta} x f(x/\theta) \Pi(\theta/x_1, \dots, x_n) d\theta dx$$

e quindi, per quanto detto sopra, abbiamo la forma finale

$$E(X) = \frac{1}{K} \int_x \int_\theta x \cdot f(x/\theta) f(\tilde{x}/\theta) \Pi_0(\theta) d\theta dx. \quad (1.16)$$

In modo analogo si definisce il momento secondo come

$$E(X^2) = \frac{1}{K} \int_x \int_\theta x^2 \cdot f(x/\theta) f(\tilde{x}/\theta) \Pi_0(\theta) d\theta dx \quad (1.17)$$

che ci permette di ricavare la varianza di X come $Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Capitolo 2

Sistema Elo

Il sistema Elo assegna ad ogni giocatore una valutazione numerica indicante il suo valore scacchistico. La valutazione è un numero compreso tra 0 e 3000 che varia nel tempo dipendendo strettamente dai risultati dei tornei e soprattutto dagli avversari incontrati. Infatti, se il giocatore ottiene risultati di parità con giocatori aventi la stessa valutazione tutto resta invariato; se invece vince o pareggia con giocatori valutati più forti di lui sale (in proporzione) nella scala numerica, e al contrario scende se perde o pareggia con avversari valutati più deboli. Una immediata conseguenza di questo principio è che un giocatore che abbia vinto, ma non stravinto, in un torneo i cui partecipanti erano complessivamente meno forti di lui possa vedersi diminuire il proprio punteggio Elo.

Da un punto di vista scientifico, un sistema di valutazione in una attività competitiva risulta un problema di "comparazione di coppie" di individui o squadre. La comparazione di coppie costituisce la base di molte misurazioni scientifiche.

Dall'esperienza generale nello sport sappiamo che i bravi giocatori non eseguono le stesse performance nel tempo. Un giocatore ha buone e cattive giornate, così come buoni e cattivi tornei, ma nel complesso in ogni momento della sua carriera avrà un determinato livello medio che dovrebbe corrispondere alla sua attuale abilità di gioco. Dato che le grosse deviazioni dal suddetto livello sono meno frequenti delle piccole, ci sembra opportuno considerare che le performance del giocatore seguano una "distribuzione normale"

quando sono valutate su una scala appropriata. Questa non è altro che l'assunzione base del sistema Elo.

Associato alla funzione di distribuzione normale c'è il concetto di deviazione standard rappresentato simbolicamente dalla lettera σ , che ci dà la misura di diffusione delle performance individuali intorno alla media. Approssativamente 2/3 delle performance cadranno all'interno dell'intervallo che ha per centro la valutazione media e raggio σ .

Consideriamo due giocatori le cui performance sono distribuite normalmente con medie m_1 e m_2 , con deviazioni standard rispettivamente σ_1 e σ_2 . Come abbiamo già dimostrato nel precedente capitolo, la differenza delle performance dei due giocatori segue ancora una distribuzione normale che ha come media la differenza delle due medie $m_d = m_2 - m_1$ e come deviazione standard $\sigma_d = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

L'assunzione, che noi criticiamo, e sulla quale la teoria di Elo si basa è quella di considerare per tutti i giocatori la stessa deviazione standard, e quindi dato che $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ la deviazione della distribuzione differenza è $\sigma_d = \sigma\sqrt{2}$. La giustificazione che Elo dà per questa assunzione che a nostro avviso non differenzia sufficientemente la vasta gamma dei giocatori e di conseguenza le loro storie scacchistiche, è questa:

se per esempio i due giocatori hanno deviazioni standard $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ la proporzione tra la deviazione della differenza σ_d e la media delle deviazioni σ è $\sigma_d/\sigma = \sqrt{2} = 1.41$, mentre se $\sigma_1 = 2\sigma_2$, e quindi $\sigma = 1.5\sigma_2$ la proporzione $\sigma_d/\sigma = 5/1.5 = 1.49$. Questo, secondo Elo, giustifica l'uso di una stessa deviazione standard σ per tutti i partecipanti al torneo, coincidente con l'unità di scala della valutazione, senza considerare che la varianza ci fornisce la misura di attendibilità della valutazione del giocatore, che non è necessariamente la stessa.

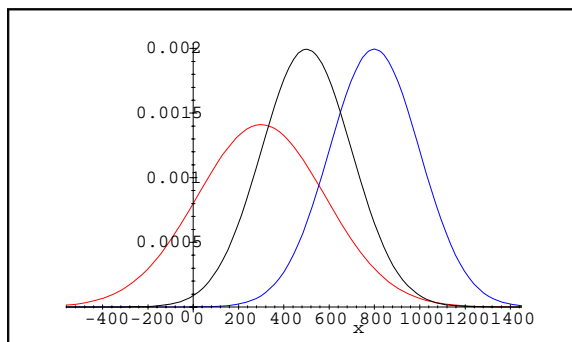
Il sistema Elo si basa inoltre su una scala di punteggio di tipo intervallare ed i giocatori sono classificati all'interno di categorie ognuna delle quali rappresenta un intervallo che è proprio la differenza di punteggio tra il primo e l'ultimo della categoria. Elo, supponendo che in una data classe (o categoria) il peggiore dei giocatori in un buon giorno giocherà circa come il migliore dei giocatori in un brutto giorno, definisce quantitativamente

l'intervallo di classe C come :

$$C = 1\sigma$$

La scelta di assumere $C = 200$ punti Elo è antecedente al lavoro di Elo, ovvero quando Elo è comparso nel mondo scacchistico, le categorie erano già suddivise in 200 punti.

L'elemento caratteristico della scala dei "valori" su cui queste valutazioni sono espresse è che due giocatori che hanno la stessa differenza di punteggio rispetto ai loro avversari avranno anche la stessa probabilità di vincere e quindi lo stesso punteggio atteso.



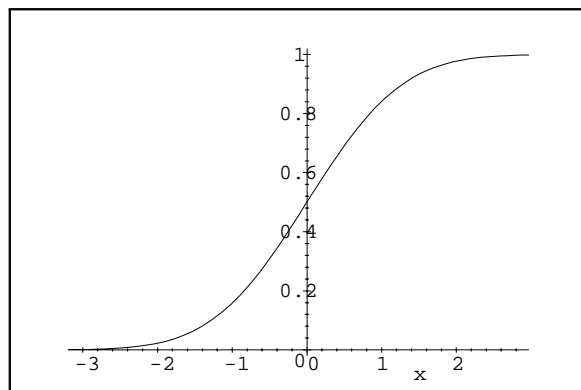
(Grafico (2.1))

Nel grafico (2.1): la curva nera e la blu rappresentano la densità di probabilità di due giocatori una con media 500, e l'altra di media 800. La curva rossa rappresenta invece la distribuzione della differenza delle performance, la porzione di area che cade dalla parte negativa delle x ci fornisce la probabilità che il giocatore, con media di valutazione più bassa, ha di vincere con il giocatore con media di valutazione più alta. Mentre la parte dell'area della curva "differenza" che giace nelle x positive rappresenta la probabilità che il giocatore con media più alta vinca con il suo avversario.

2.1 Valore atteso

Il concetto precedente di probabilità di vittoria di un giocatore rispetto all'avversario viene espresso matematicamente dalla distribuzione normale della variabile "differenza delle performance", il grafico, sotto riportato, viene chiamato "curva dell'errore di Gauss",

dove l'asse verticale rappresenta il punteggio percentuale atteso e l'asse orizzontale rappresenta la differenza delle valutazioni dei due giocatori, in unità di deviazione standard ovvero in C :



(Grafico (2.2))

La differenza di valutazione è in C

Per quanto detto sopra il punteggio percentuale atteso per un giocatore in una partita e la probabilità di vittoria vengono rappresentati dalla stessa quantità. Di conseguenza il punteggio ottenuto in un match tra due giocatori (dove i possibili punteggi sono: 1 per la vittoria, $1/2$ per la patta e 0 per la sconfitta) può, dalla curva suddetta o meglio dalla sua tabulazione, essere convertito in "differenza di valutazione". Per ciascuna differenza di valutazione D tra due avversari, la curva di distribuzione normale fornisce la probabilità di vittoria del giocatore con valutazione più alta H e quella del giocatore con valutazione

più bassa L , secondo al seguente tabella.

D	P		D	P		D	P	
diff. val.	H	L	diff. val.	H	L	diff. val.	H	L
0-3	.50	.50	122-129	.67	.33	279-290	.84	.16
4-10	.51	.49	130-137	.68	.32	291-302	.85	.15
11-17	.52	.48	138-145	.69	.31	303-315	.86	.14
18-25	.53	.47	146-153	.70	.30	316-328	.87	.13
26-32	.54	.46	154-162	.71	.29	329-344	.88	.12
33-39	.55	.45	163-170	.72	.28	345-357	.89	.11
40-46	.56	.44	171-179	.73	.27	358-374	.90	.10
47-53	.57	.43	180-188	.74	.26	375-391	.91	.09
54-61	.58	.42	189-197	.75	.25	392-411	.92	.08
62-68	.59	.41	198-206	.76	.24	412-432	.93	.07
69-76	.60	.40	207-215	.77	.23	433-456	.94	.06
77-83	.61	.39	216-225	.78	.22	457-484	.95	.05
84-91	.62	.38	226-235	.79	.21	485-517	.96	.04
92-98	.63	.37	236-245	.80	.20	518-559	.97	.03
99-106	.64	.36	246-256	.81	.19	560-619	.98	.02
107-113	.65	.35	257-267	.82	.18	620-735	.99	.01
114-121	.66	.34	268-278	.83	.17	sopra 735	1.00	.00

(Tabella (2.1))

Quando un giocatore incontra differenti avversari in uno stesso torneo (o in uno stesso periodo) allora ciascuna partita viene valutata indipendentemente ed il punteggio percentuale atteso è calcolato come somma dei valori attesi contro i vari avversari. Supponiamo infatti che nel periodo di valutazione il giocatore I incontri gli avversari I_1, \dots, I_n . Per ogni coppia (I, I_i) si calcola la differenza di valutazione D_i e attraverso la tabulazione della curva normale (2.1) si risale alla probabilità di vittoria P_i per il giocatore I . A questo punto sarà possibile calcolare il valore atteso in tutto il periodo di valutazione

come:

$$W_e = \sum_i P_i. \quad (2.1)$$

Con un leggero sacrificio nella precisione, in alcuni casi viene calcolato il punteggio atteso totale come quello ottenuto contro il giocatore medio (ovvero il giocatore che ha come valutazione la media delle valutazioni dei giocatori avversari), ovvero sia $D_c = R - R_c$; si può esprimere

$$W_e = N \times P(D_c)$$

dove N è il numero delle partite fatte, $P(D_c)$ è la percentuale basata sulla differenza della valutazione di I e della media degli altri giocatori.

Il calcolo del valore atteso è il punto fondamentale del sistema Elo e di ogni metodo di comparazione di coppie. E' a questo proposito che varie distribuzioni sono state esaminate e comparate durante lo sviluppo del sistema Elo inclusi i modelli di distribuzione usati in altri sport competitivi e nelle misurazioni di fenomeni fisici simili.

Queste che analizzeremo inizialmente sono le equazioni del sistema Elo nella loro prima ed originale formulazione, che permetterà meglio di comprendere quelle che sono le basi di questo sistema. Trascureremo le modifiche che le varie Federazioni hanno apportato.

2.2 Formula di valutazione delle Performance

La formula di valutazione della performance in un torneo è la prima equazione del sistema Elo. Questa segue immediatamente dalla curva di probabilità normale e rappresenta il punteggio Elo che si dovrebbe avere affinché i punti attesi siano uguali a quelli fatti. Se un giocatore in un torneo totalizza W punti (incluso ogni patta come 1/2 punto) su N incontri, allora il suo punteggio percentuale ottenuto sarà di $W/N = P$; attraverso la tabella (2.1) della funzione normale è possibile risalire alla differenza di valutazione $D(P)$. L'equazione è:

$$R_p = R_c + D(P) \tag{2.2}$$

dove R_p è la valutazione della performance, R_c è la media Elo degli avversari incontrati nel torneo (o in un periodo).

L'equazione viene usata per valutare le performance del giocatore su un periodo di base. (Per esempio, per la British Chess Federation (BCF), 1 anno). Teoricamente l'intervallo di tempo può essere qualsiasi ma sono necessarie almeno 30 partite (nel sistema Elo) per determinare la valutazione di un giocatore con ragionevole sicurezza. Viene usata inoltre dalla Federazione scacchistica degli Stati Uniti (USCF) per la determinazione della valutazione dei giocatori considerati provvisori cioè con meno di 25 esperienze di gioco.

L'equazione produce però una valutazione indeterminata quando il giocatore in esame, nel periodo base analizzato, totalizza un punteggio del 100% (vince sempre) o dello 0% (perde sempre), perchè la differenza associata non ha un valore determinato.

2.3 Formula di valutazione corrente

Abbiamo visto il primo approccio del sistema Elo per stimare il parametro dell'abilità di un giocatore tenendo conto soltanto di un singolo torneo (o di un singolo periodo), ignorando completamente le informazioni sui passati tornei. Per avere una completa visione dell'intera storia scacchistica del giocatore dovremmo considerare l'insieme di tutte le partite disputate come appartenenti ad un unico torneo. Questo metodo avrebbe però l'inconveniente di trattare le ultime partite e le partite giocate anni prima come ugualmente indicative per l'abilità media corrente del giocatore. L'approccio più ragionevole sembra essere quello di un compromesso tra i due sistemi estremi, e quindi un metodo che tenga in considerazione tutte le partite giocate, ma che dia un peso maggiore a quelle recenti. E' questo il principio base della formula Elo di "aggiornamento" della valutazione del giocatore; il metodo non comporta il ricalcolo della valutazione sull'intera carriera

del giocatore, ma attraverso una procedura ricorsiva, alla valutazione precedente sono sommati i risultati "recentemente" osservati.

Il periodo di tempo dopo il quale viene aggiornata la valutazione di ogni giocatore varia in ogni Federazione. La Federazione italiana (FSI) come molte altre aggiorna la valutazione dopo 6 mesi, altre Federazioni dopo 1 anno. Il "periodo di valutazione" dovrebbe essere però abbastanza lungo, da rendere la nuova valutazione attendibile, ma tuttavia non eccessivamente lungo, per non permettere di accumulare punti in modo smisurato, per questo dipendere dal numero di partite disputate. L'aggiornamento dopo quattro tornei, adottato dalla Federazione Italiana nel 1998, è stato introdotto per evitare le cosiddette "scalate" come nel già citato "caso Ricca". In precedenza un giocatore che ad inizio semestre disponeva di un punteggio Elo inferiore alla sua reale forza, giocando per tutto il semestre col suo punteggio di inizio, guadagnava punti ad ogni torneo disputato e i punti si sommano senza alcun limite se non la possibilità di giocare tornei. Tale modifica ha ancora qualche difetto. A parte il fatto che i tornei non hanno lo stesso numero di partite (si va, di solito, da 5 a 9 turni) il ricalcolo avviene a posteriori, a fine semestre, e vale solo per chi ha giocato 4 o più tornei e non per i suoi avversari per i quali viene sempre considerato con il suo punteggio di inizio torneo.

Per il calcolo dell'aggiornamento della valutazione sia:

R_n la nuova valutazione dopo l'aggiornamento e R_0 la vecchia valutazione. Supponiamo che R_0 del giocatore, di cui vogliamo conoscere l'attuale abilità, sia determinata sulla base di N_0 partite sufficientemente grande da produrre una valutazione attendibile. Supponiamo che il giocatore giochi ulteriormente N partite con $N < N_0$ (questo perchè l'equazione di aggiornamento non venga usata per giocatori considerati "provvisori", e perchè la valutazione precedente sia sufficientemente attendibile da poter essere aggiornata). Sia R la valutazione della performance per questo nuovo campione N di partite. La differenza tra quest'ultima e R_0 ci dovrebbe indicare la reale variazione dell'abilità del giocatore o semplicemente l'andamento delle sue performance. Per il calcolo della sua nuova valutazione si considera una percentuale di punteggio P_n ottenuta dalla me-

dia della percentuale di punteggio P , delle ultime N partite, con la sua percentuale di punteggio atteso P_e . Quest'ultima indica il punteggio percentuale guadagnato nelle originarie N_0 partite. Questa media pesa P di un fattore N , P_e di un fattore $(N_0 - N)$, e l'intero insieme di partite di un fattore N_0 . Questo artificio produce l'effetto di svalutare i contributi per la nuova valutazione delle prime performance e di aumentare quelli delle più recenti. Se $N \geq N_0$ la nuova valutazione è da considerarsi come la valutazione della performance del nuovo campione.

Con questo metodo abbiamo:

$$P_n = \frac{NP + (N_0 - N)P_e}{N_0}.$$

Dall'equazione (2.2), assumendo per semplicità ma non per correttezza, che la media degli avversari sia la stessa in entrambi i campionamenti, cioè con stesso R_c , si ottiene:

$$R_n = R_c + D(P_n) \quad R_0 = R_c + D(P_e);$$

allora la variazione della valutazione può essere scritta anche come:

$$\Delta R = D(P_n) - D(P_e).$$

Inoltre se P_e e P_n non differiscono molto, allora possiamo scrivere:

$$D(P_n) - D(P_e) = \frac{P_n - P_e}{S}$$

dove S è l'inclinazione dell'*approssimazione lineare*, che vedremo in seguito, della curva di percentuale attesa nell'intervallo di P_n e P_e .

Sostituendo P_n dall'equazione precedente otteniamo:

$$\Delta R = \frac{(PN - P_e N)}{N_0 S}.$$

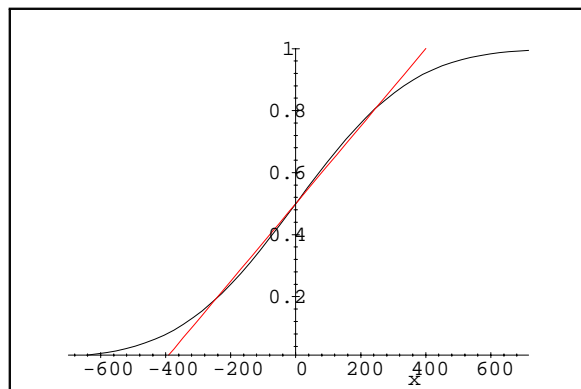
Ora $PN = W$ è proprio il punteggio fatto nelle N partite, e $P_e N = W_e$ è il punteggio atteso nello stesso campione di partite, di conseguenza il cambio della valutazione può essere espresso come:

$$\Delta R = \frac{1}{N_0 S} (W - W_e).$$

L'equazione di aggiornamento della valutazione nella sua forma generale, usata in quasi tutte le Federazioni, viene espressa come:

$$R_n = R_0 + K (W - W_e) \tag{2.3}$$

dove $K = 1/N_0 S$ riflette il relativo peso tra la valutazione precedente e la performance avuta. Un alto valore di K alto dà un grosso peso alle più recenti performance, mentre uno basso dà più peso alle performance passate. Per il valore del coefficiente K , Elo ha fatto uso di un'approssimazione lineare considerando S costante per l'intera funzione normale. Infatti esaminando la curva di aspettazione percentuale, grafico (2.2), si nota che nell'intervallo tra $-1.5C$ e $+1.5C$, che è la parte di curva più usata (che ci fornisce la percentuale di valore atteso per i giocatori che differiscono da un minimo di 0 a un massimo di 300 punti Elo), questa può essere approssimata da una linea retta con coefficiente angolare $1/4\sigma = 1/4C = 1/800$. La qualità dell'approssimazione può essere giudicata dal Grafico (2.3).



(Grafico (2.3))

La differenza di valutazione è in E (punti Elo)

Il grafico (2.3) rappresenta la sovrapposizione tra la distribuzione normale e la sua approssimazione lineale. Nelle ascisse è rappresentata la differenza $D = A - B$, in punti Elo, delle valutazioni di due giocatori, mentre nelle ordinate abbiamo la probabilità di vittoria P (percentuale attesa) del giocatore A . L'equazione della "spezzata", approssimante la curva normale di punteggio atteso percentuale, può essere espressa in termini di P e di D come:

$$P = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{D}{4C} & \text{per } -350 \leq D \leq 350 \\ 0.93 & \text{per } D > 350 \\ 0.07 & \text{per } D < -350 \end{cases} \quad (2.4)$$

L'approssimazione lineare considerata, porta ad una riformulazione delle due equazioni principali, valutazione della performance e valutazione corrente.

I valori attribuiti a N_0 sono decisi dalle varie Federazioni. Nella Federazione degli Stati Uniti (USCF) e FIDE (Federazione Internazionale) si considera un giocatore "non provvisorio" (o valutato) se ha giocato almeno 25 partite, quindi per un tale giocatore che approssimativamente ha acquisito un punteggio < 2100 pts Elo, si ha un $K = 4C/N_0 = 32$. Analogamente per giocatori con punteggio Elo compreso tra 2100 – 2400 viene usato un $K = 24$ e per giocatori con punteggio > 2400 il $K = 16$ perchè valutati su un numero maggiore di partite. Nella Federazione Italiana vengono assunti per le tre fasce di punteggio rispettivamente i valori $K = 30, 20, 10$ poichè vengono attribuiti valori diversi ai rispettivi N_0 .

2.4 Esempi di calcolo

Example 1 *Esempio di conversione della differenza di valutazione in percentuale di punteggio atteso. Match Karpov-Korchnoi a Mosca nel 1974. Prima della partita la situazione era:*

<i>Giocatori</i>	<i>valutazione</i>	<i>D</i>	<i>P(D)</i>
<i>Karpov</i>	<i>2715</i>	<i>70</i>	<i>?</i>
<i>Korchnoi</i>	<i>2645</i>	<i>-70</i>	<i>?</i>

Per la differenza D la tabella (2.2) ci dà una percentuale attesa per il giocatore con valutazione più alta di 0.60, per l'altro di 0.40. Quindi su una serie di 24 partite il punteggio atteso di gioco W_e era per Karpov 14.5 punti, mentre per Korchnoi di 9.5 punti.

Example 2 *Esempio di calcolo dell'aggiornata valutazione R_n in termini di percentuale attesa individuale P_i contro ciascun avversario.*

Calcoliamo la nuova valutazione di Portisch, con una valutazione iniziale di 2635, dopo un torneo internazionale del 1975. Esponiamo nella tabella seguente le valutazioni iniziali dei suoi avversari nel torneo. D_i rappresenta la differenza di valutazione tra Portisch e ciascun avversario. Mentre $P_i(D)$ ci indica la probabilità di vittoria di Portisch

basata sulla differenza delle valutazioni.

<i>Avversari</i>	<i>Valutazione R_i</i>	<i>Differenza D_i</i>	<i>Punt.perc.$P_i(D)$</i>
<i>Hort</i>	<i>2600</i>	<i>35</i>	<i>.55</i>
<i>Smejkal</i>	<i>2600</i>	<i>35</i>	<i>.55</i>
<i>Kavalek</i>	<i>2555</i>	<i>80</i>	<i>,61</i>
<i>Glicoric</i>	<i>2575</i>	<i>60</i>	<i>.58</i>
<i>Hübner</i>	<i>2615</i>	<i>20</i>	<i>.53</i>
<i>Sosonko</i>	<i>2470</i>	<i>165</i>	<i>.72</i>
<i>Browne</i>	<i>2550</i>	<i>85</i>	<i>,62</i>
<i>Geller</i>	<i>2600</i>	<i>35</i>	<i>.55</i>
<i>Timman</i>	<i>2510</i>	<i>125</i>	<i>.67</i>
<i>Furman</i>	<i>2560</i>	<i>75</i>	<i>.60</i>
<i>Langeweg</i>	<i>2410</i>	<i>225</i>	<i>.78</i>
<i>Ree</i>	<i>2470</i>	<i>165</i>	<i>.72</i>
<i>Donner</i>	<i>2485</i>	<i>150</i>	<i>.70</i>
<i>Kuijpers</i>	<i>2445</i>	<i>190</i>	<i>.75</i>
<i>Popov</i>	<i>2460</i>	<i>175</i>	<i>.73</i>

calcoliamo il punteggio atteso per Portisch W_e come somma dei punteggi attesi:

$$W_e = \sum P_i = 9.66$$

Per la formula di aggiornamento corrente, considerando che Portisch ha un $K = 10$, ed in quel torneo realizzò un punteggio di 10.5, abbiamo

$$\begin{aligned}
 R_n &= R_0 + K (W - W_e) \\
 &= 2635 + 10 (10.5 - 9.66) \\
 &= 2635 + 8.4 = 2643.4
 \end{aligned}$$

La nuova abilità del giocatore dopo quel torneo viene stimata di 2643.4 punti Elo.

Questo è il procedimento di calcolo che viene tutt'oggi usato nelle varie Federazioni, anche se con differenti valori dei K . Come è possibile notare è di facile uso per chiunque. Per determinare il cambio della valutazione che si avrà, in caso vittoria, sconfitta o pareggio, dopo la partita che si sta per giocare, basterà consultare la tabella.

Capitolo 3

Sistema Glicko

Nel 1995 Mark Glickman "maestro" in USCF, professore di matematica all'Università di Boston, noto statistico e Presidente della Commissione di Valutazione della USCF ha creato il sistema "Glicko" usato in Internet Chess Servers (FICS e ICC) per l'aggiornamento delle abilità dei giocatori. Questo nuovo sistema permette di avere una migliore previsione delle performance di un giocatore e di descrivere con più precisione la sua abilità al passare del tempo.

Il nuovo elemento del sistema Glicko è che ciascun giocatore riceve non solo una stima dell'abilità, come nel precedente sistema, ma anche una misura del grado di fiducia nella valutazione. Questo secondo valore viene chiamato "rating deviation" (RD), che rappresenta la deviazione standard della distribuzione delle performance. Un valore alto per l'RD corrisponde ad una valutazione non affidabile mentre un basso valore per l'RD indica che la valutazione è una precisa misura dell'abilità. Quando un giocatore ha un alto RD la sua valutazione ad ogni partita è suscettibile a dei grossi cambiamenti, al contrario se è il giocatore avversario ad avere un alto RD il cambiamento della valutazione è piccolo.

Il sistema di aggiornamento della valutazione, dopo un certo numero di partite, si basa su una approssimata analisi Bayesiana che ci permette di calcolare la distribuzione della abilità a posteriori partendo da quella a priori conosciuta.

Supponiamo che sia x il parametro della valutazione del giocatore A di cui vogliamo

stimare l'abilità e che prima della partita (o di un periodo di "calcolo") la sua valutazione abbia una distribuzione normale con media e varianza conosciute:

$$x \sim N(a, \delta_a^2).$$

Supponiamo che A durante il periodo di valutazione competa contro m avversari B_j , giocando con ciascuno n_j partite $j = 1, \dots, m$. Assumiamo anche che il parametro della valutazione y_j del j -mo avversario abbia ancora una distribuzione normale:

$$y_j \sim N(b_j, \delta_{b_j}^2)$$

con media e varianza note. Indichiamo con s_{jk} il risultato della k -ma partita contro l'avversario b_j dove $s_{jk} = 1$ se il giocatore x vince, $s_{jk} = 0.5$ se pareggia e $s_{jk} = 0$ se perde. Per esprimere la probabilità che il giocatore x abbia uno di questi risultati Glickman ricorre al modello di Bradley-Terry o meglio alla distribuzione logistica in base $\sqrt{10}$. Quindi abbiamo:

$$P(s_{jk} | x, y_j) = \frac{(10^{(x-y_j)/400})^{s_{jk}}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}}. \quad (3.1)$$

Questa è la parte del sistema Glicko che permette di ottenere dei risultati di aggiornamento per la valutazione, confrontabili numericamente con quelli del "vecchio" sistema Elo. Infatti Elo pur assumendo una distribuzione normale per le performance dei giocatori, dimostra che la distribuzione di Verhulst e in particolare quella in base $\sqrt{10}$ è una sua ottima approssimazione.

Mentre il sistema Elo si basa sulla distribuzione normale delle differenze delle performance $N(a - b, 2C^2)$, il sistema Glicko considera una distribuzione di Verhulst in base $\sqrt{10}$ che meglio approssimi quest'ultima, di equazione:

$$V(t) = \frac{\ln 10}{2C} \frac{10^{-(t-(a-b))/2C}}{(1 + 10^{-(t-(a-b))/2C})^2},$$

che mantiene la stessa media della densità normale considerata, ma non la stessa varian-

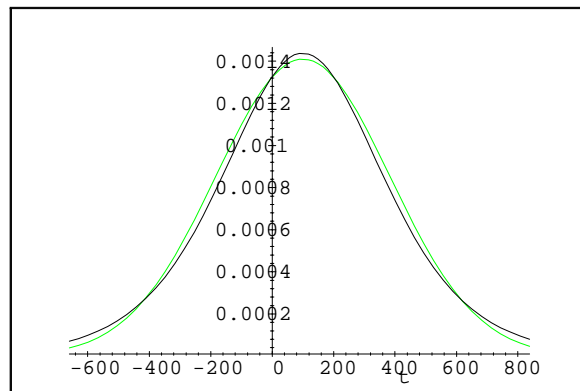
za. Metre la varianza della densità del sistema Elo è $2C^2$, la varianza di quest'ultima, equivalente alla (1.6) dato che $\sigma = C$, è $\left(\frac{2C}{\ln 10}\right)^2 \frac{\pi^2}{3}$.

La probabilità che il giocatore di media a vinca, ovvero $P(s_{jk} = 1)$, è:

$$\int_0^{+\infty} V(t) dt = \frac{10^{(a-b)/2C}}{1 + 10^{(a-b)/2C}} = \frac{10^{(a-b)/400}}{1 + 10^{(a-b)/400}} \quad (3.2)$$

analogamente per gli altri risultati fino ad ottenere l'espressione (3.1).

Possiamo vedere dal seguente grafico (3.1) che la distribuzione logistica in base $\sqrt{10}$ delle differenze delle performance di due giocatori (curva nera) è un'ottima approssimazione della distribuzione "differenza" normale (curva verde).



(Grafico (3.1))

3.1 Le patte

In queste applicazioni del sistema Glicko, Glickman è in definitiva interessato a predire il risultato atteso di un gioco, piuttosto che a dedurre la distribuzione di probabilità dei risultati di gioco. Infatti adottando un modello come quello di Bradley-Terry, che non vede il pareggio come possibile risultato di gioco, Glickman tratta il pareggio come metà vittoria e metà sconfitta. In modo più formale, l'informazione contenuta nel susseguirsi di una vittoria e di una sconfitta, di un giocatore, è equivalente all'informazione che risulta da due pareggi consecutivi. Così, se p è la probabilità che il giocatore vinca, la probabilità di una vittoria seguita da una sconfitta è $p(1 - p)$. Se questo è equivalente

all'informazione di due consecutivi pareggi, allora la probabilità di una singola patta sarà $\sqrt{p(1-p)}$. In questo modo vengono ignorate tutte quelle complicazioni associate alla patta come terzo risultato. Solo considerando quest'ultima assunzione si ottiene la (3.1) nel caso della patta con $s_{jk} = 0.5$. L'equazione (3.1) ci indica la misura dell'abilità dei giocatori quando rimane fissa nel tempo.

3.2 Aggiornamento al passare del tempo

Prima di ogni periodo di valutazione il sistema Glicko prevede un aggiornamento dell'abilità del giocatore che incorpori la quantità di tempo passato dall'ultima partita giocata. Infatti trascorso un tempo t in cui il giocatore non ha fatto partite (chiaramente riferendosi a partite con punteggio glicko) la misura dell'abilità è diventata meno certa così che la varianza della distribuzione (e quindi la misura dell'RD) deve subire un aumento. Se al tempo t_0 la valutazione del giocatore è distribuita come:

$$x^{t_0} \sim N(a, \delta_a^2),$$

t unità di tempo dopo la distribuzione potrebbe essere:

$$x^{(t_0+t)} \sim N(a, \delta_a^2 + \nu^2 t)$$

dove ν^2 è l'incremento della varianza per unità di tempo.

Un altro possibile modello è quello che fa variare la varianza logicamente con il tempo, quindi t unità di tempo dopo si avrebbe:

$$x^{(t_0+t)} \sim N(a, \delta_a^2 + \nu^2 \log(1+t)).$$

Questo secondo modello è più plausibile quando si considerano tempi lunghi, in quanto è più realistico assumere che l'incertezza nell'abilità di un giocatore non possa aumentare in modo proporzionalmente costante su lunghi periodi di tempo.

Dati numerici per l'applicazione del Glicko

Per tutti quei giocatori che non hanno ancora disputato nessun torneo e nessuna partita con il sistema di calcolo Glicko viene assunta inizialmente la stessa media di valutazione a che in FICS è 1720 punti e la stessa varianza δ_a^2 che è di (350)² (e quindi un valore per l'RD di 350). Ovviamente il valore iniziale per la varianza è alto, in maniera tale da considerare "non attendibile" la media di valutazione assunta e da permettere così un variazione sostanziale ad ogni partita giocata.

3.3 Aggiornamento dei risultati di gioco

L'aggiornamento dei risultati viene svolto separatamente per ogni singolo giocatore dopo ogni periodo di valutazione. Chiamata S la collezione dei risultati di gioco realizzata dal giocatore A di cui vogliamo calcolare l'aggiornamento, la distribuzione a posteriori $f(x|S, y_1, \dots, y_m)$ condizionata dalla valutazione degli avversari può essere espressa, per il teorema di Bayes, proporzionale al prodotto della distribuzione normale a priori $\phi(x|a, \delta_a^2) = N(a, \delta_a^2)$ e alla likelihood condizionata $L(S|x, y_1, \dots, y_m)$

$$f(x|S, y_1, \dots, y_m) \propto \phi(x|a, \delta_a^2) \cdot L(S|x, y_1, \dots, y_m)$$

La funzione di verosimiglianza condizionata è espressa, per definizione, come il prodotto su tutte le partite fatte contro gli m avversari della probabilità di vittoria (sconfitta o patta) espressa dalla relazione (3.1) precedente:

$$L(S|x, y_1, \dots, y_m) = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{n_j} \frac{(10^{(x-y_j)/400})^{s_{jk}}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}}$$

ed integrando sulle distribuzioni a priori delle valutazioni degli avversari, dopo aver assunto queste come densità normali $\phi(y_j \setminus b_j, \delta_{b_j}^2)$ con media e varianza note, otteniamo:

$$L(S \setminus x) = \prod_{j=1}^m \int \left(\prod_{k=1}^{n_j} \frac{(10^{(x-y_j)/400})^{s_{jk}}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}} \phi(y_j \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) dy_j \right). \quad (3.3)$$

Glickman non potendo risolvere direttamente quest'ultimo integrale è dovuto ricorrere alla seguente approssimazione

$$L(S \setminus x) \approx \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{n_j} \int \frac{(10^{(x-y_j)/400})^{s_{jk}}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}} \phi(y_j \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) dy_j \quad (3.4)$$

con la giustificazione che la sequenza delle n_j partite giocate contro lo stesso j -mo avversario possono essere considerate come giocate con avversari diversi ma aventi la stessa abilità. A nostro avviso l'equazione (3.3) non ha motivo di essere menzionata, perchè considerando variabile la valutazione di A nelle partite con differenti avversari, allo stesso modo deve essere considerata quando A gioca più partite con lo stesso giocatore B_j . Ovvero il prodotto delle varie densità $L_i(S \setminus x, y_i)$ (il cui prodotto ci fornisce la $L(S \setminus x)$) deve essere considerato sulla totalità delle partite giocate da A , indipendentemente dal fatto che siano avvenute con giocatori diversi o con uno stesso giocatore.

Per procedere nei calcoli, il Professor Glickman fa uso del seguente fatto:

$$l(x) = \int \frac{(10^{(x-y_j)/400})^{s_{jk}}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}} \phi(y_j \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) dy_j \approx \frac{\left(10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}\right)^{s_{jk}}}{\left(1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}\right)} \quad (3.5)$$

cioè l'integrale del prodotto della funzione logistica per la distribuzione normale a priori è ancora una funzione logistica che ha come "media" quella della densità normale a priori

e come varianza la somma delle due varianze. Abbiamo chiamato

$$g\left(\delta_{b_j}^2\right) = \frac{1}{\sqrt{1 + 3\left(\frac{\ln 10}{400}\right)^2 \delta_{b_j}^2 / \pi^2}}.$$

Dimostriamo la relazione precedente (3.5) facendo uso di alcune approssimazioni che poi useremo nel nostro sistema.

Dimostrazione

Consideriamo il caso in cui $s_{jk} = 1$ e quindi A vince con B_j .

$$\begin{aligned} l(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{10^{(x-y_j)/400}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}} \phi\left(y_j \setminus b_j, \delta_{b_j}^2\right) dy_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{10^{(x-y_j)/400}}{1 + 10^{(x-y_j)/400}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{b_j}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_j-b_j)^2}{\delta_{b_j}^2}} dy_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\ln 10}{400} \frac{10^{-(t-(x-y_j))/400}}{\left(1 + 10^{-(t-(x-y_j))/400}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{b_j}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(y_j-b_j)^2}{\delta_{b_j}^2}} dy_j \end{aligned}$$

Come più volte abbiamo osservato nei precedenti capitoli quest'ultimo passaggio è dato dalla considerazione che:

data $f(t)$ la densità della distribuzione differenza tra due giocatori, dove $D = x - y_j$ è la media, la probabilità di vincere per il giocatore con media x è data da $\int_0^{+\infty} f(t) dt = 1 - F(0)$, dove $F(x)$ è la funzione di distribuzione associata.

La media e la varianza della funzione di densità logistica considerata sopra sono:

$$\begin{aligned} E(t \setminus x, y_j) &= x - y_j \\ Var(t \setminus x, y_j) &= \left(\frac{400}{\ln 10}\right)^2 \frac{\pi^2}{3} = V^2 \end{aligned}$$

Posso a questo punto approssimare la funzione di densità logistica con la funzione di densità normale avente la stessa media e la stessa varianza con un grado di approssimazione descritto dal grafico (1.3).

Si ottiene quindi:

$$\begin{aligned} l(x) &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}V} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-(x-y_j))^2}{V^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{b_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_j-b_j)^2}{\delta_{b_j}^2}} dt dy_j \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}V} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_j-(x-t))^2}{V^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{b_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_j-b_j)^2}{\delta_{b_j}^2}} dt dy_j \end{aligned}$$

risolvendo il prodotto di due gaussiane in y_j ho

$$l(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}V} e^{-\frac{1}{2} \frac{(y_j-M)^2}{V^2 + \delta_{b_j}^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_{b_j}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-t-b_j)^2}{\delta_{b_j}^2}} dt dy_j.$$

Risolvendo l'integrale della gaussiana su y_j , tenendo conto che $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\sigma$, abbiamo

$$l(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{V^2 + \delta_{b_j}^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-(x-b_j))^2}{V^2 + \delta_{b_j}^2}} dt$$

Approssimiamo con un procedimento inverso la normale con la logistica avente stessa media e stessa varianza per ottenere:

$$l(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{\sqrt{3}\sqrt{V^2 + \delta_{b_j}^2}} \frac{10^{-\frac{(t-(x-b_j))}{\sqrt{V^2 + \delta_{b_j}^2}} \frac{\sqrt{3}\ln 10}{\pi}}}{\left(1 + 10^{-\frac{(t-(x-b_j))}{\sqrt{V^2 + \delta_{b_j}^2}} \frac{\sqrt{3}\ln 10}{\pi}}\right)^2} dt \quad (3.6)$$

$$= \frac{10^{(x-b_j)/\left(\sqrt{V^2+\delta_{b_j}^2}\frac{\sqrt{3}\ln 10}{\pi}\right)}}{1 + 10^{(x-b_j)/\left(\sqrt{V^2+\delta_{b_j}^2}\frac{\sqrt{3}\ln 10}{\pi}\right)}}$$

e sostituendo V^2 nella (3.6) ho la tesi.

Nel caso in cui $s_{jk} = 0$ e quindi A perde con B , ho risultati analoghi dimostrabili con lo stesso procedimento.

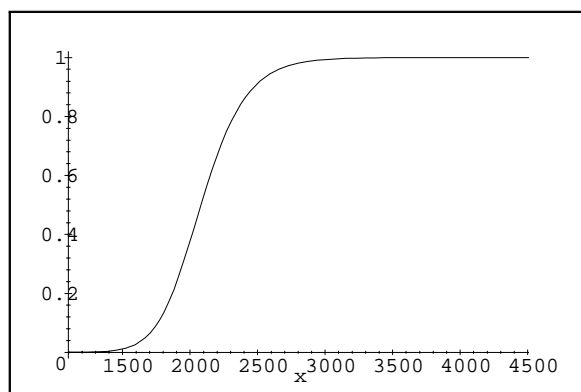
Mentre per considerare il pareggio tra A e B , non è possibile mantenere lo stesso procedimento dimostrativo. In questo caso la valutazione di $s_{jk} = 0.5$, nell'equazione (3.5), è giustificata da Glickman con l'interpolazione.

Ritornando ai calcoli di Glickman abbiamo ora ottenuto l'espressione per la verosimiglianza marginale scritta come

$$L(S \setminus x) = \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{n_j} \frac{\left(10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}\right)^{s_{jk}}}{\left(1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}\right)}. \quad (3.7)$$

Glickman ricerca per quest'ultima funzione una approssimazione normale che permetterebbe di calcolare facilmente la funzione a posteriori come prodotto di due distribuzioni normali. Occorre però tener presente che se nel periodo di valutazione dopo il quale vogliamo calcolare l'aggiornamento, il giocatore A non ha ottenuto una varietà di risultati con gli m avversari e quindi ha vinto sempre (o perso sempre) la likelihood corrispondente ha una forma (grafico (3.2)) non certamente approssimabile da una densità normale. Il sistema Glicko non tiene però conto di queste due collezioni di risultati che sono poco

probabili ma non impossibili.



(Grafico (3.2))

Per ottenere una normale approssimazione della likelihood Glickman cerca un'espressione della moda (punto di max della funzione densità) ponendo:

$$\frac{\partial \ln L(x, S)}{\partial x} = 0 \quad (3.8)$$

Infatti se consideriamo la funzione verosimiglianza approssimabile ad un densità normale, il punto in cui si annulla la derivata prima di quest'ultima e il suo logaritmo corrisponde al punto di moda (che nella funzione normale coincide con la media)

$$\frac{\partial N(x|m, \sigma^2)}{\partial x} = 0 \quad sse \quad x = m$$

$$\frac{\partial \ln N(x|m, \sigma^2)}{\partial x} = 0 \quad sse \quad x = m$$

Notiamo che

$$\ln L(x, S) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \left(\frac{\ln 10}{400} g(\delta_{b_j}^2) s_{jk} (x - b_j) - \ln \left(1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400} \right) \right)$$

e quindi

$$\frac{\partial \ln L(x, S)}{\partial x} = \frac{\ln 10}{400} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} g(\delta_{b_j}^2) \left(s_{jk} - \frac{10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}} \right) \quad (3.9)$$

Indichiamo con

$$E(x \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) = \frac{10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}} \quad (3.10)$$

il risultato atteso di A nella partita contro l'avversario B_j , ovvero la probabilità che A ha di vincere contro B_j , incorporando l'incertezza contenuta nella distribuzione a priori dell'avversario con il fattore $g(\delta_{b_j}^2)$.

Dall'equazione (3.9), chiamando \hat{x} il punto di moda si ottiene

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} g(\delta_{b_j}^2) \left(s_{jk} - E(\hat{x} \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) \right) = 0 \quad (3.11)$$

Allo stesso modo Glickman procede per l'approssimazione della varianza, osservando che data una densità normale la derivata seconda del logaritmo nel punto di moda (media) coincide con l'inverso della varianza. In realtà questa affermazione non è sempre vera, ma solo nel caso in cui $f(\tilde{x}) = [f'(\tilde{x})]^2$. Infatti chiamando $g(x) = \ln f(x)$, e dato che $[f'(\tilde{x})] = 0$ osserviamo che:

$$\begin{aligned} g''(\tilde{x}) &= \frac{f''(\tilde{x}) f(\tilde{x}) - [f'(\tilde{x})]^2}{[f(\tilde{x})]^2} \\ &= \frac{f''(\tilde{x})}{f(\tilde{x})} = f''(\tilde{x}) \quad \text{sse} \quad f(\tilde{x}) = 1. \end{aligned}$$

Glickman calcolando comunque la derivata seconda del \ln della likelihood nel punto di moda ottiene

$$\frac{\partial^2 \ln L(x \setminus S)}{\partial x^2} \Big|_{x=\hat{x}} = \left(\frac{\ln 10}{400} \right)^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \left(g(\delta_{b_j}^2) \right)^2 E(\hat{x} \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) \left(1 + E(\hat{x} \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) \right) \quad (3.12)$$

Quindi la likelihood viene approssimata da una densità normale $N(x|\hat{x}, \delta^2)$ con media uguale a \hat{x} (non calcolato) e varianza uguale all'inverso dell'espressione (3.12). Supponendo ulteriormente che il valore \hat{x} non sia così differente dal valore della media della distribuzione a priori a , del giocatore A , si sostituisce \hat{x} con a :

$$\delta^2 = \left(\left(\frac{\ln 10}{400} \right)^2 \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \left(g(\delta_{b_j}^2) \right)^2 E(a|b_j, \delta_{b_j}^2) \left(1 - E(a|b_j, \delta_{b_j}^2) \right) \right)^{-1}.$$

Dopo aver approssimato la $L(x|S)$ ad una densità normale $\phi(x|\hat{x}, \delta^2)$, la funzione di distribuzione a posteriori può ora essere espressa come proporzionale al prodotto delle due densità normali

$$f(x|S) \propto \phi(x|a, \delta_a^2) \phi(x|\hat{x}, \delta^2)$$

di cui sappiamo che la media e la varianza sono espresse come:

$$\delta_a'^2 = \left(\frac{1}{\delta_a^2} + \frac{1}{\delta^2} \right)^{-1} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{\delta_a^2 \hat{x} + \delta^2 a}{\delta_a^2 + \delta^2} \\ &= a + \frac{1/\delta^2}{1/\delta^2 + 1/\delta_a^2} (\hat{x} - a). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Dato che non è possibile calcolare direttamente il valore di \hat{x} dall'equazione precedente, Glickman cerca una approssimazione dell'espressione di $(\hat{x} - a)$ e per fare questo definisce la funzione

$$h(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} g(\delta_{b_j}^2) \frac{10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(x-b_j)/400}}, \quad (3.15)$$

ottenuta dal calcolo della derivata prima del logaritmo, e dalla quale otteniamo:

$$h(\hat{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} g(\delta_{b_j}^2) s_{jk}. \quad (3.16)$$

Dato che $h(x)$ è una funzione derivabile (anche C^∞) in a , Glickman considera il suo sviluppo in serie di Taylor ottenendo la seguente approssimazione in \hat{x} :

$$h(\hat{x}) \approx h(a) + (\hat{x} - a) h'(a), \quad (3.17)$$

dove

$$h'(a) = \left(\frac{\ln 10}{400} \right) \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \left(g(\delta_{b_j}^2) \right)^2 E(a \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) \left(1 - E(a \setminus b_j, \delta_{b_j}^2) \right). \quad (3.18)$$

Quindi sostituendo l'approssimazione lineare per $(\hat{x} - a)$ la media della distribuzione a posteriori può essere scritta come:

$$\begin{aligned} a' &\approx a + \frac{1/\delta^2}{1/\delta^2 + 1/\delta_a^2} \left(\frac{h(\hat{x}) - h(a)}{h'(a)} \right) \\ &= a + \frac{\frac{\ln 10}{400}}{1/\delta^2 + 1/\delta_a^2} (h(\hat{x}) - h(a)), \end{aligned} \quad (3.19)$$

quest'ultima uguaglianza deriva dal fatto che $1/\delta^2$ e $h'(a)$ differiscono solo per la costante $\frac{\ln 10}{400}$. In forma estesa la (3.19) la possiamo scrivere come:

$$a' = a + \frac{\frac{\ln 10}{400}}{1/\delta^2 + 1/\delta_a^2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} g(\delta_{b_j}^2) \left(s_{jk} - \frac{10^{g(\delta_{b_j}^2)(a-b_j)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_j}^2)(a-b_j)/400}} \right). \quad (3.20)$$

Il sistema Glicko è matematicamente più complesso del sistema Elo, ma produce due equazioni (3.13) e (3.20) che da sole calcolano l'aggiornamento della media e della varianza di un qualsiasi giocatore, sia questo "valutato", "non valutato" (che non ha mai giocato partite con un sistema di valutazione) o "provvisorio" (che ha giocato un numero inferiore a 20 partite).

E' necessario inoltre far notare che l'elemento innovativo di questo sistema rispetto al "vecchio" è l'introduzione della *rating deviation* (δ_a di A e δ_{b_j} degli avversari) che indica il grado di fiducia riposto nella valutazione dei giocatori, considerata invece certa in Elo.

Questo fa sì che l'espressione del valore atteso, formula (3.10), contenga il *fattore di attenuazione* $g\left(\delta_{b_j}^2\right)$ che tiene conto dell'incertezza contenuta nella valutazione a priori degli avversari. Quando la valutazione di B_j è incerta (con un grande $\delta_{b_j}^2$) il valore $g\left(\delta_{b_j}^2\right)$ è piccolo ($\ll 1$) e la variazione della valutazione di A sarà piccola per qualsiasi risultato.

Quando invece $g\left(\delta_{b_j}^2\right) = 1$, $\forall j = 1 \dots m$ e quindi tutti gli avversari sono stimati senza errore ($\delta_{b_j} = 0 \forall j$), il sistema Glicko si riduce al sistema Elo. In questo caso infatti la (3.16) si riduce a:

$$h(\hat{x}) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} s_{jk} = W,$$

che rappresenta il punteggio totale realizzato dal giocatore A , e

$$h(a) = \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} \frac{10^{(a-b_j)/400}}{1 + 10^{(a-b_j)/400}} = W_e$$

che indica la somma dei punteggi attesi calcolati con la distribuzione di Verhulst in base $\sqrt{10}$.

La formula di aggiornamento della media della valutazione diventa

$$a' = a + K(W - W_e) \tag{3.21}$$

dove $K = \frac{\ln 10}{400} / (1/\delta^2 + 1/\delta_a^2)$.

E' immediato notare che la (3.21) e la (2.3) coincidono (a meno di notazioni), ed è per questo che possiamo considerare il sistema Elo come un caso particolare del sistema Glicko.

Il sistema di valutazione, adottato in via sperimentale da Internet Chess Server, prevede un aggiornamento della media e della varianza dopo ogni partita, piuttosto che dopo un determinato periodo. In questo caso, le formule per la valutazione a posteriori, con

$m = 1$ e $n_1 = 1$, diventano:

$$a' = a + \frac{\frac{\ln 10}{400}}{1/\delta^2 + 1/\delta_a^2} g(\delta_{b_1}^2) \left(s_1 - \frac{10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}} \right)$$

dove

$$\delta^2 = \left(\left(\frac{\ln 10}{400} g(\delta_{b_1}^2) \right)^2 \left(\frac{10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}} \right) \left(1 - \frac{10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}}{1 + 10^{g(\delta_{b_1}^2)(a-b_1)/400}} \right) \right)^{-1}.$$

In ultimo, facciamo notare che la varianza a posteriori, espressa dalla (3.13), subisce una diminuzione dopo ogni partita, indipendentemente dal risultato conseguito e dai giocatori considerati. Anche se la varianza a posteriori è stata ottenuta algebricamente con criteri legittimi, quest'ultima osservazione indica un comportamento "non conforme" ad una varianza. Per meglio spiegare quest'ultimo concetto faremo un esempio che poi riporteremo numericamente anche nell'ultimo capitolo.

Consideriamo un giocatore A con media, sufficientemente attendibile, $a = 1850$ e quindi con uno scarto quadratico medio basso, $\delta_a = 100$. Supponiamo che A perda con un giocatore B con media, di gran lunga inferiore, $b = 1400$, ma allo stesso modo attendibile, quindi con $\delta_b = 100$. La performance di A è ovviamente al di fuori delle aspettative, quest'ultima partita non ci dovrebbe fornire una migliore conoscenza della sua abilità. In questo caso ci si aspetterebbe che la media di A comunque diminuisse, ma non certo la sua varianza.

Con il nostro sistema teorico, come vedremo meglio nel prossimo capitolo, siamo riusciti anche ad ovviare a quest'ultimo tipo di problema.

Nonostante il gran numero di elementi "criticabili", che abbiamo illustrato nel corso dello svolgimento di questo capitolo, il sistema Glicko riesce perfettamente, sia pur migliorandolo, ad approssimare i risultati numerici ottenibili con l'"affezionato" sistema Elo.

Capitolo 4

Sistemi teorici

La prima idea di un nuovo sistema di valutazione è nata ancor prima che si venisse a conoscenza dell'incredibile sistema Glicko. Questi che chiameremo *Sistemi Teorici* non sono altro che analisi Bayesiane basate su alcune semplici assunzioni, valide non soltanto nel mondo scacchistico, ma in tutte quelle competizioni in cui siano appropriati i termini di "abilità", "vittoria" e "sconfitta". I precedenti due sistemi, Elo e Glicko, anche se in modo diverso, hanno implicito il concetto di *classe intervallo C*, equivalente a 200 punti. Al contrario i sistemi 1 e 2 (quest'ultimo descritto in seguito) non hanno elementi predefiniti e quindi riconducibili ad una specifica competizione.

4.1 Primo tentativo

Questo 1° sistema nasce unicamente per verificare quali e quante possano essere le difficoltà, in un sistema bayesiano (di inferenza bayesiana), nel calcolo della variazione dell'abilità di un giocatore. Le uniche assunzioni che facciamo sono semplici e lecite, ma portano allo stesso tempo ad un sistema di calcolo estremamente complesso e a dei risultati non validi (e non comprensibili). Pur avendo una validità teorica nell'impostazione, ed alcuni aspetti positivi, migliori rispetto anche al Glicko, il sistema non ha una validità complessiva.

Ne riportiamo ugualmente l'impostazione e parte dei calcoli fatti.

Consideriamo il giocatore \mathbf{A} , la cui abilità \mathbf{X}_a assumiamo essere distribuita normalmente con media a e varianza δ_a^2 . Quindi l'abilità \mathbf{X}_a che consideriamo variabile avrà una densità di distribuzione $f_A(x; a, \delta_a)$ che dipende dai parametri a e δ_a^2 . A differenza degli altri sistemi, non cercheremo di stimare il parametro a , ma la considereremo come una variabile random $\boldsymbol{\alpha}$, dove a rappresenta i suoi possibili valori. Come tale avrà una densità $\Pi_0(a)$. E' lecito assumere che la densità di $\boldsymbol{\alpha}$, dato che rappresenta la variabile aleatoria "media dell'abilità", sia ancora una densità normale e quindi $\Pi_0(a) = N(\mu_1, \sigma_1^2)$. La funzione $f_A(x; a, \delta_a)$ diventa a questo punto una densità *condizionata* data $\boldsymbol{\alpha} = a$ denotata da $f_A(\mathbf{X}_a/a, \delta_a) = f_A(\mathbf{X}_a/\boldsymbol{\alpha} = a, \delta_a)$.

Quest'ultimo procedimento è stato spiegato nel primo capitolo in forma generale.

Applicando il teorema di Bayes e la definizione di valore atteso, possiamo calcolare $E(X_a)$, prima di ogni partita, nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 E(\mathbf{X}_a) &= \int_x \int_a x f_A(x/a, \delta_a) \Pi_0(a) da dx \\
 &= \int_x x \int_a \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(a-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}\right) da dx \\
 &= \int_x x \frac{1}{2\pi\delta_a\sigma_1} \int_a \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\delta_a^2 + \sigma_1^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\left(a - \frac{\delta_a^2\mu_1 + \sigma_1^2 x}{\delta_a^2 + \sigma_1^2}\right)^2}{\frac{\delta_a^2\sigma_1^2}{\delta_a^2 + \sigma_1^2}}\right) da dx \\
 &= \int_x x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \sigma_1^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu_1)^2}{\delta_a^2 + \sigma_1^2}\right) = \mu_1 \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

come sperato il valore atteso coincide con la media della distribuzione a priori.

Analogamente calcoliamo la varianza del giocatore A , prima della partita, ottenendo

il seguente risultato:

$$Var(\mathbf{X}_a) = \int_x \int_a (x - \mu_1)^2 f_A(x/a, \delta_a) \Pi_0(a) da dx = \delta_a^2 + \sigma_1^2. \quad (4.2)$$

Ovvero la varianza del giocatore prima di una partita è uguale alla somma delle varianze della abilità e della sua media.

Critiche al sistema 1:

- considereremo la varianza dell'abilità non come una variabile ma come parametro. Questo ci permette di ottenere una grossa semplificazione nei calcoli, non dovendo integrare anche su questa (altrimenti non esisterebbe soluzione!!)
- ad ogni giocatore sono associati 3 parametri :
 - δ_a^2 varianza dell'abilità del giocatore
 - μ_1 abilità del giocatore prima di ogni partita
 - σ_1^2 varianza della media dell'abilità del giocatore

Consideriamo di voler stimare il valore atteso $E(\mathbf{X}_a)$ dell'abilità di A , dopo una vittoria con il giocatore B . Supponiamo analogamente che B abbia una abilità \mathbf{X}_b con funzione di densità $f_B(x; b, \delta_b)$ con media b e varianza δ_b^2 . Allo stesso modo, associamo a b , considerata come variabile random, una densità normale $\Pi_0(b) = N(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Nel calcolo del valore atteso $E(\mathbf{X}_a)$ occorre aggiornare la densità a priori di a con una vittoria con B . Per fare questo basterà l'applicazioni dell'inferenza bayesiana.

La densità di a data $v(A, B)$, una vittoria di A con B , e dati b e δ_b si esprime come:

$$\Pi(a/v(A, B), b, \delta_b) = \frac{\Pi_0(a) \cdot L(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b)}{K} \quad (4.3)$$

con K costante di normalizzazione.

Integrando su b e considerando la sua densità, si ottiene la densità di a aggiornata dopo la vittoria con B , che indicheremo con

$$\tilde{\Pi}(a) = \int_b \Pi(a/v(A, B), b, \delta_b) \cdot \Pi_0(b) db. \quad (4.4)$$

Prima di arrivare alla formula definitiva che esprime l'abilità di A dopo una vittoria con B , è necessario soffermarci sulla funzione $L(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b)$ della (4.3) che esprime la probabilità che A vinca con B dati a, δ_a, b, δ_b . Questa rappresenta il punto fondamentale del sistema, e come abbiamo visto, anche dei sistemi precedenti (in Elo era rappresentato dal valore atteso W_e).

Semplicemente, definisco la probabilità che A vinca con B come la probabilità che l'abilità di A sia maggiore (strettamente) dell'abilità di B quindi

$$P(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b) = P(X_a > X_b/a, \delta_a, b, \delta_b),$$

una volta fissata l'abilità di B come $X_b = y$, dove y varia su tutto \mathbb{R} , basterà calcolare

$$P(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b) = \int_{\mathbb{R}} P(X_a > y/a, \delta_a, b, \delta_b, X_b = y) \cdot f_B(y/b, \delta_b) dy.$$

In termini di funzioni densità e facendo quindi variare l'abilità di A su valori maggiori di y , si ha:

$$L(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_y^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} e^{-\frac{1}{2}(x-a)^2/\delta_a^2} dx \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} e^{-\frac{1}{2}(y-b)^2/\delta_b^2} dy.$$

Applicato il cambio di variabile $z = x - y$ risolviamo l'integrale in y come integrale del prodotto di due gaussiane in y fino ad arrivare alla forma

$$L(v(A, B)/a, \delta_a, b, \delta_b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{1}{2}(z-(a-b))^2/(\delta_a^2 + \delta_b^2)} dz. \quad (4.5)$$

Data la non risolubilità dell'integrale, ricerchiamo una funzione densità approssimante la normale della (4.5), che conservi media e varianza e sia facilmente integrabile. La funzione cercata, per le considerazioni fatte nel capitolo 1, è:

$$H(z) = \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\cosh \left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{z - (a - b)}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \right) \right)^{-2}.$$

Possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} L(v(A, B) / a, \delta_a, b, \delta_b) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{1}{2}(z-(a-b))^2 / (\delta_a^2 + \delta_b^2)} dz \\ &\approx \int_0^{+\infty} H(z) dz. \end{aligned}$$

Risolvendo quest'ultimo integrale si ottiene l'espressione voluta della likelihood

$$L(v(A, B) / a, \delta_a, b, \delta_b) = 1 / \left(1 + \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}} (a - b) / \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) \right) \quad (4.6)$$

Partendo da un sistema Elo in cui la probabilità di vincere tra due giocatori è funzione solo delle valutazioni, considerate come certe, si arriva al Glicko che contiene nella likelihood, le medie delle valutazioni e solo l'incertezza della distribuzione a priori dell'avversario (δ_b), non tenendo conto che l'attendibilità della valutazione del giocatore deve influire nel calcolo della sua probabilità di vincere. Come invece si nota dall'espressione (4.6) la likelihood del sistema 1 contiene entrambi i fattori di incertezza, sia quello del giocatore (δ_a) che dell'avversario (δ_b). Questo è un grande passo avanti rispetto ai sistemi precedentemente analizzati.

Abbiamo così ottenuto l'espressione della distribuzione a priori $\tilde{\Pi}(a)$ dopo la vittoria con B , e sostituendo questa nella (4.1) si ha:

$$E_v(\mathbf{X}_a) = \int_x \int_a x \cdot f_A(x/a, \delta_a) \cdot \tilde{\Pi}(a) da dx$$

valore atteso dell'abilità di A dopo una vittoria con B .

Daremo l'espressione per esteso della precedente dopo alcune semplificazioni di costanti.

$$\begin{aligned} E_v(\mathbf{X}_a) &= \int_x \int_a x \frac{1}{2\pi\delta_a} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta_a^2}} \cdot \\ &\cdot \frac{e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt}{\int_a^{+\infty} e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt da} \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(b-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} db da dx \\ &= \int_x \int_a \int_b \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2\pi\delta_a} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta_a^2}} \cdot \\ &\cdot \frac{e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt}{\int_a^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{2(\delta_a^2 + \delta_b^2)}} dt da} \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(b-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} db da dx \end{aligned} \quad (4.7)$$

dove abbiamo considerato gli integrali su a e su b estesi a tutto \mathbb{R} , ammettendo per le medie anche valori negativi. Risolviamo a parte il denominatore, osservando che è funzione di b e per questo indicato con $D(b)$.

$$\begin{aligned} D(b) &= \int_a^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt da \\ &= \int_0^{+\infty} \int_a^{+\infty} e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{(a-(b+t))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} da dt. \end{aligned}$$

Risolvendo l'integrale del prodotto delle due gaussiane in a otteniamo:

$$D(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{\alpha} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(t - (\mu_1 - b))^2}{\alpha^2}\right) dt$$

dove $\alpha^2 = \delta_a^2 + \delta_b^2 + \sigma_1^2$.

Per risolvere quest'ultimo integrale occorre approssimare la densità normale $N(b + \mu_1, \alpha^2)$ con la densità logistica corrispondente, ricavando

$$D(b) \approx 2\pi \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{(\mu_1 - b)}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

Tornando all'integrale iniziale, considero, per primo, il prodotto di tutte le gaussiane in a , e integrando su questa, otteniamo:

$$E(X_a) = \int_x \int_b \int_0^{+\infty} \left(\frac{x e^{-\frac{(b - (\mu_1 - t))^2}{2\alpha^2}} e^{-\frac{(b - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x - M_1)^2}{\Delta^2}}}{\sqrt{2\pi} \sigma_2 \sqrt{\delta_a^2 \alpha^2 + \sigma_1^2 (\delta_a^2 + \delta_b^2)}} \right) / D(b) dt db dx$$

dove $M_1 = (\sigma_1^2 (b + t) + \mu_1 (\delta_a^2 + \delta_b^2)) / \alpha^2$ e $\Delta^2 = (\delta_a^2 \alpha^2 + \sigma_1^2 (\delta_a^2 + \delta_b^2)) / \alpha^2$.

Prima di integrare rispetto alla variabile b occorre farlo, per semplicità di calcolo, in x , ottenendo:

$$E(X_a) = \int_b \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{\sigma_2 \alpha} M_1 e^{-\frac{(b - (\mu_1 - t))^2}{2\alpha^2}} e^{-\frac{(b - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \right) / D(b) dt db.$$

Integrando in t , considerando che il termine M_1 dipende anche da t , si ottiene:

$$E(X_a) = \int_b \frac{e^{-\frac{(b - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}}}{D(b)} \left(\int_0^{+\infty} S e^{-\frac{1}{2} \frac{(t - (\mu_1 - b))^2}{\alpha^2}} dt + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2 \alpha^3} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2} \frac{(t - (\mu_1 - b))^2}{\alpha^2}} dt \right) db$$

dove $S = (\mu_1 (\delta_a^2 + \delta_b^2) + \sigma_1^2 b) / (\sigma_2 \alpha)$.

Il primo integrale in t si risolve in modo analogo al denominatore $D(b)$, spiegheremo nei dettagli solo il secondo. Posto $m = \mu_1 - b$, si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-(\mu_1-b))^2}{\alpha^2}} dt &= (-\alpha^2) \left[\int_0^{+\infty} -\frac{m}{\alpha^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-(\mu_1-b))^2}{\alpha^2}} dt + \int_0^{+\infty} -\frac{t-m}{\alpha^2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(t-(\mu_1-b))^2}{\alpha^2}} dt \right] \\ &\approx m\sqrt{2\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{m}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{m^2}{\alpha^2}} \\ &= (\mu_1 - b) \sqrt{2\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{\mu_1-b}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_1-b)^2}{\alpha^2}} \end{aligned}$$

Tornando all'espressione iniziale abbiamo:

$$E(X_a) \approx \int_b e^{-\frac{(b-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} \frac{1}{D(b)} \left(\sqrt{2\pi} \frac{1}{1 + e^{-\frac{m}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}} \left(\frac{S}{\alpha} + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2 \alpha^2} m \right) + \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2 \alpha} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_1-b)^2}{\alpha^2}} \right) db.$$

Semplificando con il denominatore e svolgendo i calcoli si ha

$$\begin{aligned} E(X_a) &\approx \int_b \frac{\mu_1 (\delta_a^2 + \delta_b^2)}{\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} db + \int_b \frac{\mu_1 \sigma_1^2}{\alpha^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} db + \\ &+ \int_b \frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} db - \int_b \frac{\sigma_1^2}{\alpha^2} \frac{b}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}} db + \\ &+ \int_b \frac{\sigma_1^2}{2\pi\sigma_2\alpha} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-N)^2}{G^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\beta^2}} db + \\ &+ \int_b \frac{\sigma_1^2}{2\pi\sigma_2\alpha} e^{-\frac{1}{2} \frac{(b-N)^2}{G^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\mu_1-\mu_2)^2}{\beta^2}} \cdot e^{-\frac{(\mu_1-b)}{\alpha} \frac{\pi}{\sqrt{3}}} db. \end{aligned}$$

dove $\beta^2 = \delta_a^2 + \delta_b^2 + \sigma_1^2 + \sigma_2^2$, $N = \frac{\alpha^2 \mu_2 + \sigma_2^2 \mu_1}{\beta^2}$ e $G = \frac{\alpha^2 \sigma_2^2}{\beta^2}$.

Risolvendo gli integrali in b , i primi in modo immediato, l'ultimo ricavando una gaussiana in b , si ottiene:

$$E(X_a) \approx \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\beta^2}\right) + \frac{\sigma_1^2}{\beta\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\pi^2}{6}\right) \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \left(\mu_2 - \mu_1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Il risultato ottenuto, in forma contratta, è il seguente

$$E_v(\mathbf{X}_a) \approx \mu_1 + \frac{\sigma_1^2}{\beta\sqrt{2\pi}} (F + kG_v) \quad (4.8)$$

dove per semplicità abbiamo indicato con $k = \exp\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$, $F = \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} (\mu_2 - \mu_1)^2\right)$, $G_v = \exp\left(-\frac{1}{2\beta^2} \left(\mu_2 - \mu_1 - \frac{\pi\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2\right)$.

L'indice v di G indica l'aggiornamento dopo una vittoria.

Con calcoli analoghi ai precedenti, si può aggiornare la varianza del giocatore A dopo la vittoria con B . Per semplicità abbiamo preferito calcolare il valore del momento secondo di X_a che ha la seguente espressione:

$$E_v(X_a^2) = \int_x \int_a x^2 \cdot f_A(x/a, \delta_a) \cdot \tilde{\Pi}(a) da dx,$$

la sua forma estesa, analogamente alla (4.7) è

$$E_v(\mathbf{X}_a^2) = \int_x \int_a x^2 \frac{1}{2\pi\delta_a} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\delta_a^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt}{\int_a^b e^{-\frac{(a-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \frac{1}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(t-(a-b))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} dt da} \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(b-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} db da dx$$

Dalla relazione che lega il momento secondo, la varianza e la media della stessa variabile aleatoria si deduce l'espressione della varianza come

$$Var_v(X_a) = E_v(X_a^2) - [E_v(X_a)]^2,$$

ottenendo il seguente risultato:

$$\begin{aligned} \text{Var}_v(X_a) \approx & \sigma_1^2 + \delta_a^2 + \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}\beta^3} (\mu_2 - \mu_1) (F + kG_v) + \frac{\sigma_1^4}{\sqrt{2\pi}\beta^3} \left(\frac{\sigma_2^2\pi}{\sqrt{3}} \right) kG_v \\ & - \frac{\sigma_1^4}{2\pi\beta^2} (F + kG_v)^2. \end{aligned}$$

Per aggiornare media e varianza del giocatore A dopo una *sconfitta* con B , occorre eseguire gli stessi calcoli, esprimendo però la likelihood come la densità di probabilità che A perda con B . Analogamente infatti si può definire la Probabilità che A sia sconfitto da B , come la probabilità che l'abilità di A sia minore dell'abilità di B , quindi

$$P(s(A, B) / a, \delta_a, b, \delta_b) = P(X_a < X_b / a, \delta_a, b, \delta_b)$$

Come nel caso della vittoria, fissiamo l'abilità di B come $X_b = y$, ma facciamo variare l'abilità di A su valori minori di y . Risolviamo analogamente l'integrale su y fino ad arrivare alla seguente forma della likelihood

$$L(s(A, B) / a, \delta_a, b, \delta_b) = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{1}{2}(z-(a-b))^2 / (\delta_a^2 + \delta_b^2)} dz. \quad (4.9)$$

Usiamo a questo punto la stessa approssimazione con la $H(x)$ ottenendo:

$$L(s(A, B) / a, \delta_a, b, \delta_b) \approx 1 / \left(1 + \exp \left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} (a - b) / \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) \right) \quad (4.10)$$

Prima di esporre i risultati ottenuti per la media e la varianza a posteriori nel caso di una sconfitta occorre indicare con

$$G_s = \exp \left(-\frac{1}{2\beta^2} \left(\mu_2 - \mu_1 + \frac{\pi\alpha}{\sqrt{3}} \right)^2 \right)$$

e quindi esprimere la valutazione del giocatore A dopo 1 sconfitta con B come:

$$E_s(\mathbf{X}_a) \approx \mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{\beta\sqrt{2\pi}}(F + kG_s) \quad (4.11)$$

la varianza della abilità di A dopo 1 sconfitta con B come:

$$\begin{aligned} Var_s(X_a) \approx & \sigma_1^2 + \delta_a^2 - \frac{\sigma_1^2}{\sqrt{2\pi}\beta^3}(\mu_2 - \mu_1)(F + kG_s) \\ & - \frac{\sigma_1^4}{\sqrt{2\pi}\beta^3} \left(\frac{\sigma_2^2\pi}{\alpha\sqrt{3}} \right) kG_s - \frac{\sigma_1^4}{2\pi\beta^2}(F + kG_s)^2 \end{aligned} \quad (4.12)$$

dove α, β, F, k sono definiti come sopra.

4.1.1 Conclusioni sul sistema 1

Come abbiamo già fatto notare nel corso dell'esposizione, il primo sistema offre il grande vantaggio di avere una likelihood funzione di quattro parametri, sia delle medie che delle varianze dell'abilità dei due giocatori.

$$Prob(A \text{ vinca con } B) = 1 / \left(1 + \exp \left(-\frac{\pi}{\sqrt{3}}(a - b) / \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) \right)$$

Anche Glickman fa menzione, nel rapporto della Commissione del Ratings dell'USCF del 1995, di una funzione che abbia caratteristiche simili, ma senza collocarla all'interno di un sistema di calcolo. Infatti, come abbiamo potuto notare nello sviluppo del sistema Glicko, la likelihood presente è funzione di soli tre parametri a, b, δ_b .

Uno dei motivi per cui, questo primo tentativo lo consideriamo non valido, è che per valori alti delle variabili σ_1, σ_2 , la (4.12) assume valori negativi. Non esiste nessuna giustificazione per una varianza negativa.

Esempio

Consideriamo che un giocatore A con media di valutazione $\mu_1 = 1850$ e con i valori dei parametri $\delta_a = 1, \sigma_1 = 200$, compete con il giocatore B , di media $\mu_2 = 1840$, e con

$\delta_b = 1$, $\sigma_2 = 200$. Supponiamo che A perda con B . Con l'equazioni (4.11) e (4.12) calcolo la nuova media e la nuova varianza di A . I risultati ottenuti sono:

$$E_s(X_a) = 1660$$

$$V_s(X_a) = -19755$$

La valutazione dell'abilità del giocatore A diminuisce notevolmente, di 190 punti, dato che è stato sconfitto da un giocatore con valutazione inferiore, ma la varianza assume un valore inconcepibile.

In realtà i valori dei parametri che portano a varianze negative non sono molti, ma sufficienti per la non validità dell'intero sistema.

4.2 Secondo sistema

Al di là del significato intrinseco del termine, possiamo comunque considerare l'abilità come una variabile random, e quindi come funzione, dipendente da alcuni parametri. L'abilità di un qualsiasi individuo nel compiere un'azione varia da momento a momento; nel caso di un giocatore, può variare all'interno di una stessa partita. I fattori, che determinano una variazione dell'abilità di un giocatore possono essere molteplici, come la tranquillità emotiva, le condizioni di salute, la simpatia o antipatia nei confronti dell'avversario, il trovarsi in un ambiente più o meno conosciuto, le condizioni atmosferiche ed ambientali e molte altre. A questo proposito ricordiamo che Tarrasch nel 1908, perdendo con Lasker, incolpò per la sconfitta subita il clima marino, anche se il match si svolse a 250 Km dal mare.

Servendosi di un'impostazione bayesiana, sarebbe teoricamente possibile esaminare un gran numero di parametri, ma considerate le difficoltà incontrate nel sistema 1, l'analisi risulterebbe di difficile risoluzione. Allo stesso tempo sarebbe impossibile per una qualsiasi Federazione poter valutare correttamente i parametri considerati.

Nello sviluppo del sistema 2 seguiremo un'impostazione bayesiana più semplice di quella precedente, dove gli unici fattori considerati sono i risultati delle partite giocate e l'avversario incontrato. Con il secondo sistema otteniamo risultati convincenti, competitivi con i sistemi precedenti, usando un minor numero di approssimazioni. In verità, l'unica approssimazione che useremo, anche se in molteplici occasioni, è la sostituzione della densità normale con la densità logistica avente stessa media e stessa varianza. Ma come vedremo, questa che per semplicità chiameremo "approssimazione (*)", verrà applicata solo per le densità "differenza" delle abilità di due giocatori; ciò è lecito grazie al già citato articolo di Hal Stern.

La differenza sostanziale rispetto ai precedenti sistemi è dovuta ad una semplice **assunzione**:

In una partita, vince il giocatore che in quel momento ha abilità maggiore.

Sia X_a l'abilità del giocatore A , assumiamo che X_a , variabile random, segua una distribuzione normale con media a e varianza δ_a^2 . La densità della distribuzione della variabile X_a , in un determinato momento, ha equazione

$$f_A(x/a, \delta_a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right). \quad (4.13)$$

Analogamente per B , la sua abilità X_b seguirà una distribuzione normale con media b e varianza δ_b^2 di equazione

$$f_B(x/b, \delta_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-b)^2}{\delta_b^2}\right). \quad (4.14)$$

Facciamo una osservazione sull'abilità di A , ovvero "registriamo" il risultato R di una sua partita con un giocatore B . Per l'aumento delle informazioni che abbiamo, circa l'abilità di A , la distribuzione della densità di X_a subirà una variazione. Semplicemente applicando il teorema di Bayes otteniamo la densità "aggiornata" della variabile X_a considerando che A ha giocato una partita con B e il risultato di A è R . La densità in

questione è la densità condizionata dall'evento R , ovvero:

$$f(x/a, \delta_a, R) = \frac{L(R/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a)}{\int_x L(R/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a) dx} \quad (4.15)$$

In un primo momento considereremo solo due possibili risultati, ossia $R = v$ se A vince con B , $R = s$ se A subisce una sconfitta. Per quanto riguarda la patta tra due giocatori, non potendo proseguire lo stesso procedimento, che necessiterebbe di "pesanti" approssimazioni, useremo un metodo diverso che tratteremo in un secondo momento. L'aumento di informazioni ottenute, circa l'abilità di A , ovviamente farà cambiare il grado di fiducia che ripongo sul giocatore.

4.2.1 A vince con B

Pur seguendo la stessa impostazione, per semplicità divideremo i due casi. La densità dell'abilità di A dopo *una* vittoria con B è:

$$f(x/a, \delta_a, v) = \frac{L(v/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a)}{\int_x L(v/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a) dx}. \quad (4.16)$$

La funzione di verosimiglianza $L(v/x, a, \delta_a)$ ci indica la probabilità, che in quel momento, A abbia vinto con B . Per l'assunzione fatta, la probabilità che A vinca con B coincide con la probabilità che l'abilità di A , in quel momento, sia superiore a quella del suo avversario. Quindi, fissata l'abilità di A ad un determinato valore x , possiamo esprimere la precedente assunzione come

$$\begin{aligned} L(v/x, a, \delta_a) &= Prob(X_b < X_a / X_a = x) \\ &= \int_{-\infty}^x f_B(y/b, \delta_b) dy \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Sostituendo l'espressione della (4.17) nella (4.16) otteniamo in forma estesa la densità aggiornata dell'abilità di A .

$$f(x/a, \delta_a, v) = \frac{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx} \quad (4.18)$$

Piuttosto che considerare l'espressione della densità aggiornata, siamo interessati a conoscerne la media e la varianza. Calcoleremo quindi il valore atteso come:

$$E_v(X_a) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx} dx. \quad (4.19)$$

Calcoleremo separatamente, per semplicità, il denominatore che indicheremo con K_v .

$$K_v = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx$$

Applicando il cambio di variabile $z = y - x$ otteniamo

$$K_v = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(z+x-b)^2}{\delta_b^2}\right) dz \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx,$$

è possibile così calcolare il prodotto delle due gaussiane in x ricavando

$$K_v = \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\delta_a\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-M)^2}{\Delta^2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(b-z-a)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dx dz$$

dove abbiamo posto $M = \frac{a\delta_b^2 + (b-z)\delta_a^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}$ (che dipende da z), $\Delta^2 = \frac{\delta_a^2\delta_b^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}$. Integrando su x si

ha:

$$K_v = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b - a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz.$$

Approssimando la densità normale con la logistica corrispondente è possibile risolvere il precedente integrale ed ottenere

$$\begin{aligned} K_v &\approx \int_{-\infty}^0 \frac{\pi}{4\sqrt{3} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\cosh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{z - (b - a)}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}}\right) \right)^{-2} dz \\ &= 1 / \left(1 + \exp\left(-\frac{a - b}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \right). \end{aligned}$$

La risoluzione di quest'ultimo integrale è semplice, considerata la definizione del coseno iperbolico.

Tornando all'integrale originario, abbiamo che:

$$\begin{aligned} E_v(X_a) &\approx \frac{1}{K_v} \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y - b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \\ &\quad \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi} \delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - a)^2}{\delta_a^2}\right) dx. \end{aligned}$$

Svolgendo calcoli analoghi al denominatore, considerando sia il cambio di variabile $z = y - x$, che il prodotto delle due gaussiane in x otteniamo:

$$\begin{aligned} E_v(X_a) &\approx \frac{1}{K_v} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^0 x \frac{1}{2\pi \delta_a \delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - M)^2}{\Delta^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b - a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz dx \\ &= \frac{1}{K_v} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} M \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b - a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz \\ &= \frac{1}{K_v} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\frac{a\delta_b^2 + b\delta_a^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b - a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{K_v} \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\frac{-z\delta_a^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b-a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) dz$$

Considerando l'approssimazione logistica della densità normale ed integrando su z abbiamo:

$$E_v(X_a) \approx \frac{1}{K_v} \frac{a\delta_b^2 + b\delta_a^2 + \delta_a^2(a-b)}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \frac{1}{1 + e^{-\frac{a-b}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}}} + \frac{1}{K_v} \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(a-b)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}}.$$

Semplificando e sostituendo il valore di K_v si ha

$$E_v(X_a) \approx a + \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(e^{-\frac{1}{2} \frac{(a-b)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} + e^{-\frac{1}{2} \frac{(a-b)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{a-b}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}} \right)$$

ovvero

$$E_v(X_a) \approx a + \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_v), \quad (4.20)$$

dove $F = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(a-b)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right)$, $k = \exp\left(\frac{\pi^2}{6}\right)$, $G_v = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(a-b + \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2})^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right)$.

La (4.20) permetterà di calcolare la nuova media di A dopo 1 vittoria con B .

In modo analogo, valuteremo l'aggiornamento del momento secondo dell'abilità di A , che ci permetterà di derivare la varianza. Il momento secondo è espresso dalla

$$E_v(X_a^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right)}{K_v} dx.$$

Tenendo conto di un leggero aumento della difficoltà, ma considerando sempre come unica approssimazione, quella del passaggio dalla densità normale alla densità logistica,

otteniamo:

$$E_v (X_a^2) = a^2 + \delta_a^2 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\frac{\delta_a^2 (a + b) + 2a\delta_a^2\delta_b^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \right) (F + kG_v)$$

Quest'ultimo risultato è stato raggiunto effettuando calcoli simili ai precedenti, che abbiamo deciso di omettere.

Dalla relazione che lega varianza, media e momento secondo di una stessa variabile aleatoria, abbiamo:

$$\begin{aligned} Var_v (X_a) &= E_v (X_a^2) - [E_v (X_a)]^2 \\ &= \delta_a^2 - (a - b) \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_v) + \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} (F + kG_v)^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Le equazioni (4.20) e (4.21) descrivono interamente la variazione (in termini di valori caratteristici) della densità dell'abilità di A dopo 1 vittoria con B . Vedremo in seguito, che per poter iterare il procedimento dopo n vittorie di A occorrerà fare un'ulteriore osservazione, tenendo conto che sarebbe troppo semplicistico e non corretto effettuare la somma algebrica delle n variazioni ottenute individualmente.

4.2.2 A perde con B

La densità del giocatore A dopo *una* sconfitta con B la possiamo esprimere come

$$f(x/a, \delta_a, s) = \frac{L(s/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a)}{\int_x L(s/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a) dx} \quad (4.22)$$

In questo caso la funzione di verosimiglianza ci indica la probabilità che A , dati i parametri a, δ_a, b, δ_b , perda con B , che equivale a calcolare la probabilità che l'attuale abilità

di A , supposta x , sia inferiore a quella di B .

$$\begin{aligned}
L(s/x, a, \delta_a) &= \text{Prob}(X_b > X_a / X_a = x) \\
&= \int_x^{+\infty} f_B(y/b, \delta_b) dy \\
&= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy
\end{aligned} \tag{4.23}$$

In forma estesa la (4.22) diventa

$$f(x/a, \delta_a, s) = \frac{\int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx}$$

Analogamente a prima calcoleremo il denominatore, omettendo i calcoli iniziali, indicandolo in questo caso con K_s , ottenendo:

$$\begin{aligned}
K_s &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z - (b-a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz.
\end{aligned}$$

Invocando nuovamente l'approssimazione (*) otterremo:

$$\begin{aligned}
K_s &\approx \int_0^{+\infty} \frac{\pi}{4\sqrt{3}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\cosh\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \frac{z - (b-a)}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}}\right) \right)^{-2} dz \\
&= 1 / \left(1 + \exp\left(\frac{a-b}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right) \right)
\end{aligned}$$

Osserviamo che vale la seguente relazione $K_v = 1 - K_s$.

Per la valutazione del valore atteso nel caso di una sconfitta, si eseguono calcoli

analoghi. Per questo motivo ne ometteremo gran parte, menzionando esclusivamente le parti salienti.

$$\begin{aligned}
E_s(X_a) &\approx \frac{1}{K_s} \int_{-\infty}^{+\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_a} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-a)^2}{\delta_a^2}\right) dx \\
&= \frac{1}{K_s} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} x \frac{1}{2\pi\delta_a\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-M)^2}{\Delta^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-(b-a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz dx \\
&= \frac{1}{K_s} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\frac{a\delta_b^2 + b\delta_a^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-(b-a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz + \\
&\quad - \frac{1}{K_s} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(\frac{z\delta_a^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-(b-a))^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right) dz.
\end{aligned}$$

Risolvendo gli ultimi integrali per mezzo della consueta approssimazione, otteniamo:

$$\begin{aligned}
E_s(X_a) &\approx a - \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{(a-b)^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \left(1 + e^{\frac{a-b}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}}\right) \\
&= a - \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_s)
\end{aligned} \tag{4.24}$$

dove $G_s = \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(a-b - \frac{\pi}{\sqrt{3}} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2})^2}{\delta_a^2 + \delta_b^2}\right)$, F e k come sopra.

Il calcolo della nuova varianza dopo una sconfitta è del tutto analogo alla precedente varianza dopo una vittoria, con la sola variazione degli estremi dell'integrazione su z , dovuti alla differente likelihood.

$$\begin{aligned}
Var_s (X_a) &= E_s (X_a^2) - [E_s (X_a)]^2 \\
&= \delta_a^2 + (a - b) \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_s) + \\
&\quad - \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \frac{1}{2\pi} (F + kG_s)^2
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Nel caso in cui il giocatore A perda una partita con B , le equazioni (4.24) e (4.25) descrivono la nuova media e la nuova varianza da attribuire ad A .

4.2.3 Risultati numerici a confronto dopo una partita

Riporteremo alcuni risultati numerici, ottenibili dai tre sistemi descritti in precedenza, che delineano l'aggiornamento dell'abilità del giocatore, dopo una partita in cui i soli risultati possibili sono la vittoria e la sconfitta.

1. Sia A il giocatore con media $\underline{a = 1850}$, e s.q.m. $\underline{\delta_a = 200}$. Il suo avversario B ha media $\underline{b = 1750}$, e s.q.m. $\underline{\delta_b = 200}$. Le variazioni Δ che considereremo sono da attribuirsi alla media di A , mentre δ'_a e il nuovo s.q.m. di A dopo la partita.

	Sistema Elo	Sistema Glicko	Nostro Sistema
Δ se A vince con B	+11	+63	+80
δ'_a se A vince con B	-	180	171
Δ se A perde con B	-19	-95	-153
δ'_a se A perde con B	-	180	155

Osserviamo che in questo caso, avendo varianze alte per entrambi i giocatori, queste diminuiscono, anche nel nostro sistema, sia in caso di vittoria che di sconfitta per il giocatore A . Ma criticiamo il fatto che la varianza del giocatore valutato più "forte", subisca una diminuzione più alta dopo una sconfitta piuttosto che dopo una vittoria. I valori delle nostre oscillazioni sono sempre più alti sia in positivo

che in negativo, proprio perchè il nostro sistema prescinde da una suddivisione in categorie, che "medierebbe" i risultati.

2. Osserviamo il caso in cui a competere siano due giocatori con una differenza di valutazioni notevole, ma la cui stima è affidabile (e in ugual misura). Sia A con media $a = 1850$, e $\delta_a = 100$ e B con media $b = 1400$ e $\delta_b = 100$. Calcoleremo l'aggiornamento per A .

	Sistema Elo	Sistema Glicko	Nostro Sistema
Δ se A vince con B	+1.8	+4	+0.17
δ'_a se A vince con B	-	98	99
Δ se A perde con B	-28	-48	-57
δ'_a se A perde con B	-	98	140

Analizzando i risultati vediamo che: se i due giocatori sono "ben valutati" e quindi hanno basse varianze e la differenza di media è grande, quello con valutazione più alta acquista pochi punti se vince, e ne perde molti subisce una sconfitta. Il nostro sistema accentua notevolmente le due variazioni, e sarebbe quindi poco gradito ai "bravi" giocatori. Per il giocatore B avviene il contrario. Allo stesso tempo se A perde, data la non prevedibilità del risultato, il suo s.q.m. aumenta, di 40 punti. Mentre nel Glicko, come già osservato, la varianza diminuisce sempre in ugual misura, considerato che l'equazione di aggiornamento della varianza è la stessa in entrambi i casi.

3. Osserveremo in questo esempio sia la variazione di A che quella di B , dopo aver disputato una partita, il cui risultato è sempre o la vittoria o la sconfitta. Sia A con

$a = 1850$, $\delta_a = 200$ e sia B con $b = 1400$, $\delta_b = 100$. La tabella per A è la seguente:

	Sistema Elo	Sistema Glicko	Nostro Sistema
Δ se A vince con B	+1.8	+17	+9.6
δ'_a se A vince con B	-	191	190
Δ se A perde con B	-28	-182	-371
δ'_a se A perde con B	-	191	188

Dato che non abbiamo cambiato i valori delle medie dell'abilità, e tanto meno la differenza delle valutazioni, il sistema Elo non subisce variazioni rispetto all'esempio precedente. Negli altri due sistemi possiamo osservare che aumentando la varianza di A anche le variazioni della media aumentano sia in positivo, quando A vince, che in negativo, quando A perde. I valori invece delle nuove varianze sono simili.

La tabella di B è:

	Sistema Elo	Sistema Glicko	Nostro Sistema
Δ se B vince con A	+28.2	+40	+92
δ'_b se B vince con A	-	98	98
Δ se B perde con A	-1.8	-6	-2.4
δ'_b se B perde con A	-	98	98

Dal confronto di quest'ultime due tabelle possiamo notare che indipendentemente dalle valutazioni dei giocatori, nel sistema Elo, quando A vince con B , acquista gli stessi punti che B perde nella stessa partita. Per questo diremo che il sistema Elo è un sistema **"bilanciato"**. Gli altri due sistemi, come abbiamo potuto notare, non possono esserlo nel caso in cui l'affidabilità delle due valutazioni è diversa, ovvero quando $\delta_a \neq \delta_b$.

4. Per meglio evidenziare il concetto di "bilanciamento" riportiamo quest'ulteriore esempio. Consideriamo che una partita sia disputata da due giocatori aventi stessa

media, ovvero sia $a = b = 1800$. Supponiamo però che le abilità abbiano una diversa attendibilità, e quindi sia $\delta_a = 200$, e $\delta_b = 100$. Supponiamo che A vinca con B . Osserviamo dalla seguente tabella le variazioni delle medie dei due giocatori dopo la partita.

	Sistema Elo	Sistema Glicko	Nostro Sistema
Variazione della media da A	+15	+48	+142
Variazione della media da B	-15	-11	-35

Sia nel sistema Glicko che nel Nostro, entrambi sistemi "non bilanciati", il giocatore con valutazione più incerta, vincendo, guadagna più punti di quanti ne perda l'avversario; poichè il primo si sta confrontando con un giocatore la cui abilità è ben stimata, mentre il secondo compete con un avversario di cui non ne conosce bene il valore.

4.2.4 Aggiornamento dopo n partite

L'esigenza di arrivare ad un metodo che permetta di calcolare la variazione della media e della varianza dell'abilità di un giocatore dopo n partite, è dovuta al fatto che nessuna Federazione nazionale sarebbe in grado ricalcolarne dopo ogni partita. Questo perchè all'interno di uno stesso torneo, che può durare anche più giorni, ciascun giocatore in media gioca diverse partite, senza considerare che nello stesso giorno si può competere anche in più tornei.

I metodi illustrati nei precedenti due paragrafi non possono essere iterati nel caso in cui A giochi n partite. I problemi per questo tipo di computazione, sono dovuti alla Likelihood che stiamo considerando. Ricordiamo che la likelihood nel caso in cui A vinca una partita è rappresentata dalla (4.17), e nel caso di una sconfitta dalla (4.23). Cerchiamo di generalizzare il procedimento nel caso in cui A faccia n partite contro i giocatori B_1, \dots, B_n , dove non escludiamo il caso in cui $i = j$, per qualche $i, j = 1, \dots, n$.

Supponiamo che A ne vinca p contro i B_1, \dots, B_p e ne perda $t = n - p$ contro B_{p+1}, \dots, B_n

(a meno di riordinamento degli indici degli avversari). Indichiamo con N la n -upla dei risultati ottenuti dal giocatore A , ovvero $N = (v_1, \dots, v_p, s_{p+1}, \dots, s_n)$. La likelihood corrispondente è della forma

$$\begin{aligned}
L(N/x, a, \delta_a) &= \prod_{i=1}^p \prod_{j=p+1}^n \int_{-\infty}^x f_{B_i}(y_i/b_i, \delta_{b_i}) dy_i \cdot \int_x^{+\infty} f_{B_j}(y_j/b_j, \delta_{b_j}) dy_j \\
&\approx \prod_{i=1}^p \prod_{j=p+1}^n \frac{\exp\left(\frac{x-b_i}{\delta_{b_i}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x-b_i}{\delta_{b_i}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)} \cdot \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-b_j}{\delta_{b_j}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)} \\
L(N/x, a, \delta_a) &\approx \prod_{i=1}^n \frac{\left(\exp\left(\frac{x-b_i}{\delta_{b_i}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right)^{s_i}}{1 + \exp\left(\frac{x-b_i}{\delta_{b_i}} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)} \tag{4.26}
\end{aligned}$$

$$\text{dove } s_i = \begin{cases} 1 & \text{per } i = 1, \dots, p \\ 0 & \text{per } i = p + 1, \dots, n. \end{cases}$$

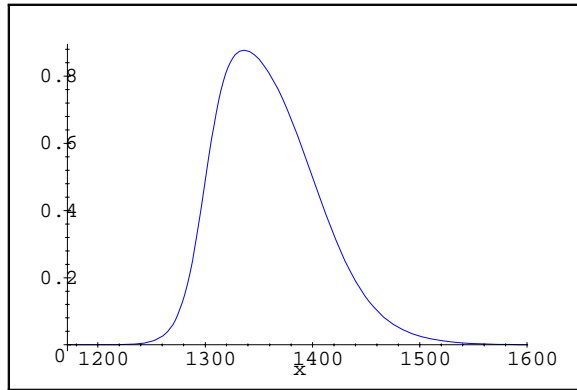
Al di là del fatto che nei casi limiti questa likelihood non è una densità, non ci è stato possibile esprimere una densità a posteriori, in cui la funzione di verosimiglianza è data dalla (4.26), e pensiamo che sia impossibile farlo in modo "maneggevole". Allo stesso tempo ogni approssimazione scelta per una tale funzione sarebbe inappropriata. Ricordiamo che nel sistema Glicko, la likelihood che è espressa dalla (3.7), e differisce dalla (4.26) solo per alcune costanti e per la base usata per la funzione logistica, è stata approssimata ad una densità normale.

Mostreremo alcune forme assunte (per determinati valori dei parametri, che saranno puramente casuali) dalla likelihood suddetta per alcuni valori di p e t , che non ci permetterebbero di compiere un'approssimazione così "forte".

Le curve sotto riportate non sono normalizzate, deve essere indicativo solo il loro andamento.

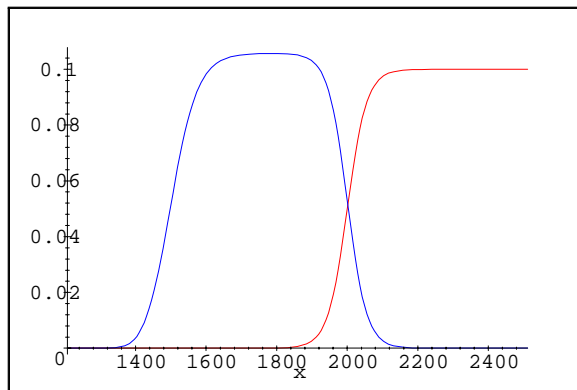
- Se $p = t$, ovvero se A perde e vince uno stesso numero di partite (supposto per

semplicità pari), la likelihood segue un andamento del tipo:



(Grafico (4.1))

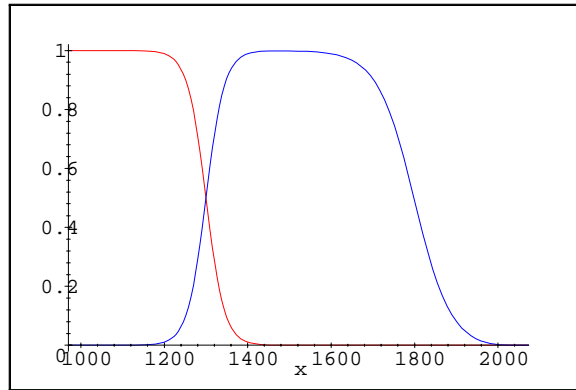
- Nel caso in cui $p > t$, ovvero il numero di partite vinte da A è maggiore del numero di partite perse, la forma della likelihood è rappresentata nel grafico (4.2) dalla curva blu, fino ad arrivare al caso limite in cui $p = n$, rappresentato nello stesso grafico dalla curva rossa.



(Grafico (4.2))

- Al contrario se $p < t$ l'andamento della likelihood è rappresentato nel grafico (4.3) dalla curva blu, mentre il caso in cui A perde tutte le partite giocate e quindi $t = n$

viene rappresentato dalla curva rossa dello stesso grafico.



(Grafico (4.3))

Per quanto detto, il metodo che useremo per poter considerare più di una partita, dovrà servirsi di un'ulteriore considerazione. Anche se la likelihood usata assume forme diverse, al variare dei risultati ottenuti, osserviamo che la funzione di densità a posteriori dell'abilità del giocatore, di cui abbiamo ricavato media e varianza, è in ogni caso una densità approssimabile ad una normale. L'equazione che la rappresenta è data, come abbiamo già visto, dalla (4.15) che qui riporteremo per comodità del lettore

$$f(x/a, \delta_a, R) = \frac{L(R/x, a, \delta_a) \cdot f_A(x/a, \delta_a)}{K}$$

con K costante di normalizzazione.

Dato che $f_A(x/a, \delta_a)$ è la densità *a priori* dell'abilità di A , supposta normale, $f(x/a, \delta_a, R)$ è la densità dell'abilità *a posteriori* che, dalle osservazioni fatte e dal lavoro di Glickman, risulta distribuita normalmente. Considerando che il prodotto di densità normali è ancora una densità normale, attraverso il procedimento inverso vogliamo risalire a quella gaussiana $\Psi_R(x)$ tale che:

$$f(x/a, \delta_a, R) \propto \Psi_R(x) \cdot f_A(x/a, \delta_a), \quad (4.27)$$

trascurando il grado di approssimazione tra la $\Psi_R(x)$ e la $L(R/x)$. Come vedremo in

seguito la densità $\Psi_R(x)$ sarà funzione, oltre che del risultato R , anche dei parametri sia del giocatore A che del suo avversario B , ovvero sarà $\Psi_R(x) = \Psi_R(x/a, \delta_a, b, \delta_b)$.

Questo metodo, pur conservando i risultati dei paragrafi precedenti ottenuti con solo l'approssimazione (*), permetterà di calcolare la densità a posteriori come prodotto di un qualsiasi numero di densità normali.

La media e la varianza, aggiornate dopo che A ha vinto con B , permetteranno di calcolare una gaussiana che indicheremo con $\Psi_v(x)$. Per il caso in cui A ha perso con B , in modo analogo, troveremo una densità normale $\Psi_s(x)$. Tornando al problema iniziale, in cui A ha vinto p partite e ne ha perse t , contro gli avversari B_1, \dots, B_n , l'aggiornamento della sua abilità sarà espresso semplicemente dalla

$$f(x/a, \delta_a, N) \propto \prod_{i=1}^n \Psi_R(x/a, \delta_a, b_i, \delta_{b_i}) \cdot f_A(x/a, \delta_a) \quad (4.28)$$

$$\text{dove } R = \begin{cases} v & \text{per } i = 1, \dots, p \\ s & \text{per } i = p + 1, \dots, n \end{cases}$$

Calcolo delle funzioni $\Psi(x)$

Per una completa conoscenza di una densità normale $\Psi(x) = N(m, \sigma^2)$, ne dovremo conoscere i valori caratteristici, in questo caso basterà determinare la media m e la varianza σ^2 .

Per poter determinare la $\Psi_R(x)$, che verifichi la (4.27), occorrerà che la media della funzione a posteriori, precedentemente determinata, coincida con la media del prodotto delle densità normali $\Psi_R(x)$ e $f_A(x)$, ovvero che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{L(R/x) \cdot f_A(x)}{K} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\Psi_R(x) \cdot f_A(x)}{\tilde{K}} dx, \quad (4.29)$$

dove nelle funzioni abbiamo ommesso, per semplicità, la dipendenza dai parametri.

In modo analogo, l'uguaglianza deve valere per le varianze, e quindi in termini di

momento secondo, dobbiamo avere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{L(R/x) \cdot f_A(x)}{K} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\Psi_R(x) \cdot f_A(x)}{\tilde{K}} dx \quad (4.30)$$

Calcoliamo $\Psi_v(x)$.

Il prodotto delle due gaussiane $\Psi_v(x/m_v, \sigma_v) \cdot f_A(x/a, \delta_a)$ ha media

$$\begin{aligned} M &= \frac{a\sigma_v^2 + m_v\delta_a^2}{\sigma_v^2 + \delta_a^2} \\ &= a + \frac{\delta_a^2(m_v - a)}{\sigma_v^2 + \delta_a^2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

mentre la sua varianza è:

$$\Delta^2 = \frac{\sigma_v^2\delta_a^2}{\sigma_v^2 + \delta_a^2}. \quad (4.32)$$

La media e la varianza della densità a posteriori sono espresse rispettivamente dalle (4.20) e (4.21). Considerando il sistema dell'equazioni ottenute uguagliando le medie e le varianze ho la soluzione.

$$\begin{cases} M = a + \frac{\delta_a^2}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_v) \\ \Delta^2 = \delta_a^2 - (a - b) \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}} (F + kG_v) - \frac{1}{2\pi} \frac{\delta_a^4}{\delta_a^2 + \delta_b^2} (F + kG_v)^2. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema nelle due incognite m_v e σ_v^2 ottengo i seguenti risultati:

$$\begin{aligned} m_v &= a + \frac{\sqrt{2\pi}(\delta_a^2 + \delta_b^2)}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}(F + kG_v) + \sqrt{2\pi}(a - b)}, \\ \sigma_v^2 &= \frac{2\pi\sqrt{(\delta_a^2 + \delta_b^2)^3}}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2}(F + kG_v)^2 + \sqrt{2\pi}(a - b)(F + kG_v)} - \delta_a^2. \end{aligned}$$

Al variare di b e δ_b le relazioni precedenti, determinano le $\Psi_v(x)$.

Calcoliamo $\Psi_s(x)$.

In modo analogo, calcoleremo la media e varianza della densità normale $\Psi_s(x)$ considerando che le espressioni della media e della varianza, aggiornate dopo una sconfitta, sono espresse rispettivamente dalle (4.24) e (4.25), ottenendo:

$$m_s = a - \frac{\sqrt{2\pi} (\delta_a^2 + \delta_b^2)}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2} (F + kG_s) - \sqrt{2\pi} (a - b)},$$

$$\sigma_s^2 = \frac{2\pi \sqrt{(\delta_a^2 + \delta_b^2)^3}}{\sqrt{\delta_a^2 + \delta_b^2} (F + kG_s)^2 - \sqrt{2\pi} (a - b) (F + kG_s)} - \delta_a^2.$$

Per via analitica abbiamo verificato soltanto la (4.29) e la (4.30), che non implicano necessariamente la validità della loro generalizzazione dopo n partite, espressa dalle seguenti relazioni:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{L(N/x) \cdot f_A(x)}{K_1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\prod_{i=1}^n \Psi_R(x) \cdot f_A(x)}{\widetilde{K}_1} dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{L(N/x) \cdot f_A(x)}{K_1} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \frac{\prod_{i=1}^n \Psi_R(x) \cdot f_A(x)}{\widetilde{K}_1} dx$$

Considerata la difficoltà di quest'ultimo problema, ci ripromettiamo di testare le formule precedenti e di dimostrarle analiticamente in un secondo momento. Dalle osservazioni fatte graficamente, possiamo però ipotizzare che l'approssimazione ottenuta dopo n partite, sia analoga a quella ottenuta dopo un'unica partita, e quindi "buona".

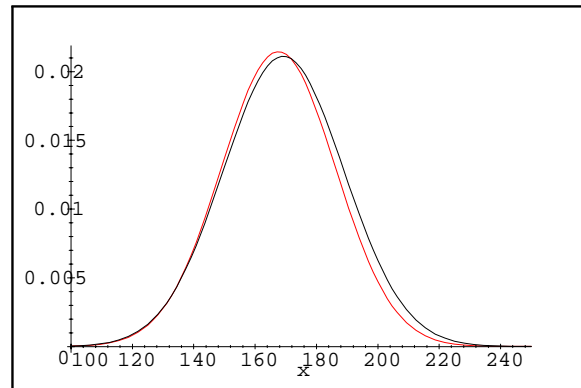
I valori che daremo ai parametri a, δ_a, b, δ_b sono puramente arbitrari.

Example 3 *A perde con B.*

Supponiamo che $a = 180$, $\delta_a = 20$, $b = 100$, $\delta_b = 60$. La curva nera del grafico (4.4) rappresenta la densità a posteriori di A , dopo una sconfitta con B , espressa dalla (4.16) (dopo una prima approssimazione con la logistica), mentre la curva rossa rappresenta la

stessa densità a posteriori ma in cui la likelihood è la funzione trovata $\Psi_s(x)$, ovvero:

$$f(x/a, \delta_a, N_1) \propto \Psi_s(x/a, \delta_a, b, \delta_b) \cdot f_A(x/a, \delta_a).$$

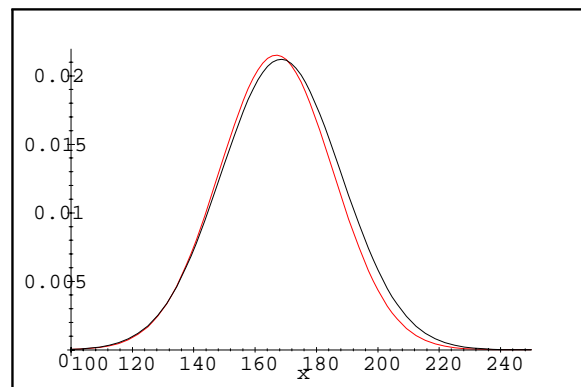


(Grafico (4.4))

Esempio 4 *A perde con B e con C.*

Consideriamo i giocatori A e B come sopra, e supponiamo che dopo aver perso con B, A perda anche con C che ha media $\underline{c} = 300$ e $\underline{\delta_c} = 150$. Osserviamo la densità a posteriori di A dopo aver subito queste due sconfitte. La nera descrive la a posteriori originaria, mentre la rossa descrive la densità a posteriori espressa da:

$$f(x/a, \delta_a, N_2) \propto \Psi_s(x/a, \delta_a, b, \delta_b) \cdot \Psi_s(x/a, \delta_a, c, \delta_c) \cdot f_A(x/a, \delta_a).$$



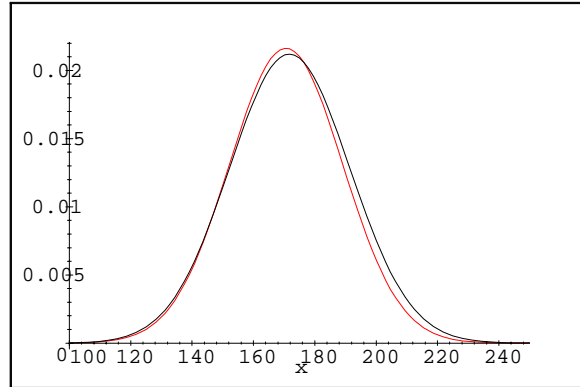
(Grafico (4.5))

Esempio 5 *A perde con B e con C ma vince con D.*

Supponiamo che A continui ancora a giocare e supponiamo che, disputando una partita

con D , vinca. I valori dei parametri di D siano $d = 500$, di media di gran lunga superiore ad A , e $\delta_d = 200$. La curva nera è quella di partenza, mentre la curva rossa è la nostra approssimazione, che in questo caso è espressa da:

$$f(x/a, \delta_a, N_3) \propto \Psi_s(x/a, \delta_a, b, \delta_b) \Psi_s(x/a, \delta_a, c, \delta_c) \Psi_s(x/a, \delta_a, d, \delta_d) f_A(x/a, \delta_a)$$



(Grafico (4.6))

4.2.5 A pareggia con B

In ultimo tratteremo il caso in cui A pareggi con B .

Il metodo che prenderemo in esame, si differenzia dai metodi precedentemente usati nel caso di una vittoria e di una sconfitta, e nel quale considereremo un numero maggiore di approssimazioni, per la semplicità dei risultati. Tratteremo infatti, come nel sistema Glicko, la probabilità di una patta come $\sqrt{p(1-p)}$ dove p è la probabilità di una vittoria. Questa considerazione ci porterà ad avere una scommessa "non coerente", dato che:

$$p + (1 - p) + \sqrt{p(1 - p)} \neq 1.$$

Inoltre vedremo che la funzione che esprime la probabilità di un pareggio, pur essendo una densità, potrà essere normalizzata solo dopo averla integrata. Questo è il tipo di procedimento che anche Glickman ha usato, fidandoci di ciò, consideriamo l'errore commesso "abbastanza piccolo".

Nel nostro secondo sistema teorico, la probabilità che A vinca con B ci è data dalla (4.17), ovvero:

$$\begin{aligned}
 Prob(v/x, a, \delta_a) &= \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \\
 &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-(b-x))^2}{\delta_b^2}\right) dz \\
 &\approx \frac{\exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}{1 + \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}
 \end{aligned}$$

dove x rappresenta un valore assunto dalla variabile aleatoria X_a .

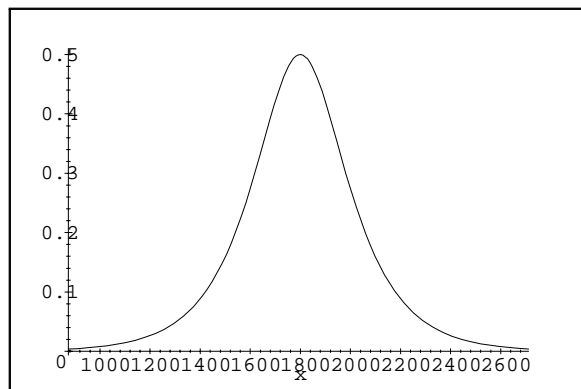
Calcolando per esteso, in modo analogo, la probabilità che A perda con B abbiamo:

$$\begin{aligned}
 Prob(s/x, a, \delta_a) &= \int_x^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(y-b)^2}{\delta_b^2}\right) dy \\
 &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\delta_b} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(z-(b-x))^2}{\delta_b^2}\right) dz \\
 &\approx \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}.
 \end{aligned}$$

Per l'assunzione fatta, la probabilità che A pareggi con B è espressa dalla

$$\begin{aligned}
 Prob(p/x, a, \delta_a) &= (Prob(v/x, a, \delta_a) \cdot Prob(s/x, a, \delta_a))^{1/2} \\
 &= \frac{\left(\exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right)^{1/2}}{1 + \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}
 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Osserviamo dal grafico seguente, che per qualsiasi valore di b, δ_b , la funzione $Prob(p/x, a, \delta_a)$, può essere "approssimata" ad una densità normale (dato che è una densità, è simmetrica, ha un punto di moda).



(Grafico (4.7))

Il procedimento di calcolo che abbiamo usato per valutare la densità normale che approssimi la (4.33), è simile a quello adottato da Glickman per l'approssimazione della likelihood, ma con alcune modifiche da noi apportate.

Prendendo in esame una densità normale $N(x/m, \sigma^2)$ osserviamo che:

$$\frac{\partial N(x/m, \sigma^2)}{\partial x} = 0 \quad \text{sse} \quad x = m \quad (4.34)$$

$$\left. \frac{\partial^2 N(x/m, \sigma^2)}{\partial x^2} \right|_{x=m} = -\frac{1}{\sigma^2} \quad (4.35)$$

Indicando $\Phi(x) = Prob(p/x, a, \delta_a)$, consideremo che il suo punto di moda coincida con il punto di media della densità normale approssimante, e che la sua derivata seconda nel punto di moda sia l'inverso (e reciproco) della varianza della normale cercata.

A questo proposito, cercheremo per quali valori dei parametri b, δ_b si ha:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = 0$$

Dopo aver svolto i calcoli, che omettiamo, si ha:

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{\frac{\pi}{2\sqrt{3}\delta_b} \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right) - \frac{\pi}{2\sqrt{3}\delta_b} \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{3\pi}{2\sqrt{3}}\right)}{\left(1 + \exp\left(\frac{x-b}{\delta_b} \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)\right)^2}$$

$$\frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = 0 \quad \text{sse} \quad x = b.$$

In modo analogo, calcoliamo

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi(x)}{\partial x^2} \right|_{x=b} = -\frac{\pi^2}{24\delta_b^2}.$$

Per le (4.34) e (4.35) potremo affermare che i valori di media e varianza della gaussiana cercata saranno:

$$m = b$$

$$\sigma^2 = \frac{24\delta_b^2}{\pi^2}.$$

Quindi l'equazione della densità normale che approssima la funzione della probabilità che A pareggi con B la esprimeremo come:

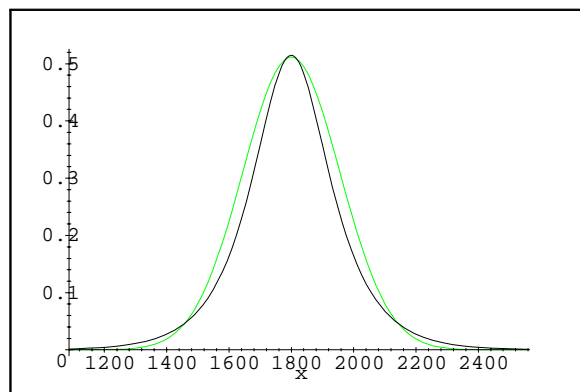
$$\Psi_g(x) = \frac{\pi}{\sqrt{2\pi}\sqrt{24\delta_b}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-b)^2}{\frac{24\delta_b^2}{\pi^2}}\right). \quad (4.36)$$

Faremo qualche esempio grafico per valutare il grado di approssimazione considerato, sia tra la (4.33) e la (4.36), che tra le densità a posteriori derivanti da quest'ultime. Solo grazie a quest'ultima approssimazione è stato possibile esprimere, in modo semplice, la densità a posteriori, quindi anche media e varianza, dell'abilità di un giocatore A dopo un pareggio.

Example 4 *Grado di approssimazione delle likelihood.*

Consideriamo che il giocatore B abbia media di abilità $\underline{b = 1800}$, e lo scarto quadratico medio della stessa sia $\underline{\delta_b = 100}$. La funzione di probabilità che un giocatore A pareggi con B , ha una densità raffigurata nel grafico sotto riportato. La curva nera è data dall'equazione (4.33), la verde è la normale approssimante che noi abbiamo trovato (4.36). Considerando che la normalizzazione non è perfetta, il grado di approssimazione lo possiamo

considerare "buono".

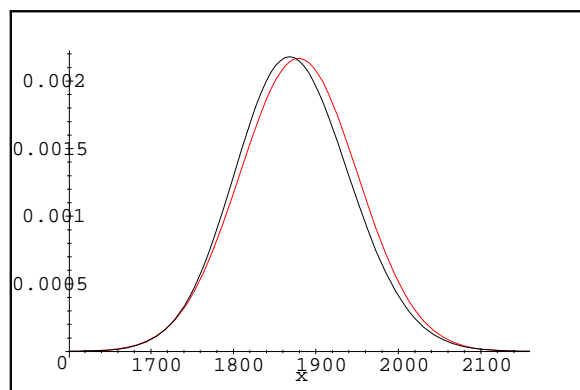


(Grafico (4.8))

Ovviamente il giocatore A che ha la stessa media, 1800, ha la probabilità più alta di pareggiare con B .

Esempio 7 *Approssimazione delle densità a posteriori.*

Consideriamo di voler analizzare la densità a posteriori del giocatore A che ha media $a = 1900$ e scarto quadratico medio $\delta_a = 120$, dopo che ha pareggiato con il giocatore B con media $b = 1800$ e $\delta_b = 80$. Nel grafico (4.9), la curva nera rappresenta la densità a posteriori che ha come likelihood la (4.33), mentre la rossa ha una likelihood espressa dalla (4.36).



(Grafico (4.9))

Grazie anche a quest'ultimo risultato, possiamo arrivare ad una formula più generale del Sistema di calcolo bayesiano dell'abilità di un giocatore A dopo \tilde{n} partite, in cui sono

ammessi i tre risultati possibili, vittoria, sconfitta e patta, e la cui espressione è data dalla:

$$f(x/a, \delta_a, \tilde{N}) \approx \prod_{i=1}^{\tilde{n}} \Psi_R(x/a, \delta_a, b_i, \delta_{b_i}) \cdot f_A(x/a, \delta_a)$$

$$\text{dove } R = \begin{cases} v & \text{per } i = 1, \dots, p \\ s & \text{per } i = p + 1, \dots, n \\ g & \text{per } i = n + 1, \dots, \tilde{n} \end{cases}$$

nella quale abbiamo considerato che A vinca p partite, ne perda $n - (p + 1)$ e ne pareggi $\tilde{n} - (p + t)$.

Bibliografia

- [1] P.BILLINGSLEY, *Probability and measure*, John Wiley & Sons, New York (1986).
- [2] R.A.BRADLEY and TERRY, "The Rank Analysis of incomplete Block Designs: Method of Paired Comparisons", *Biometrika*, 39,324-345 (1952).
- [3] H.D.BRUNK, "Mathematical Models for Ranking from Paired Comparisons", *Journal of the American Statistical Association*, 55, 503-520 (1960).
- [4] R.R.DAVIDSON, "On extending the Bradley-Terry model to accomodate ties in paired comparison experiments", *Journal of the American Statistical Association*, 65, 317-328 (1970).
- [5] A.E.ELO, *The Rating of Chessplayers, past and present*, Arco Publishing, New York (1978).
- [6] M.E.GLICKMAN, *Paired Comparison Models with Time-Varying Parameters*, PhD Dissertation, Department of Statistics, Harvard University, Cambridge (1993).
- [7] M.E.GLICKMAN, *Parameter Estimation in Large Dynamic Paired Comparison Experiments*, Tecnical Report, Department of Mathematics Boston University (1995).
- [8] M.E.GLICKMAN, *Proposal of the USCF Ratings Committee - August 1993*, USCF Ratings Committee.

- [9] M.E.GLICKMAN, *Report of the USCF Ratings Committee - August 1995*, USCF Ratings Committee.
- [10] I.J.GOOD, "On the Marking of Chessplayers", *Mathematical Gazette*, 39, 292-296 (1955).
- [11] P.V.RAO and L.L.KUPPER, "Ties in Paired-Comparison Experiments: A Generalization of the Bradley-Terry Model", *Journal of the American Statistical Association*, 62, 194-204 (1967).
- [12] R.SCOZZAFAVA, *Probabilità soggettiva*, Masson, Milano (1997).
- [13] H.STERN, "Are all linear paired comparison model empirically equivalent", *Mathematical Social Sciences*, 23, 103-117 (1992).